(Co)sinus van bijzondere hoeken.

Gegeven, hoeken α, β, en θ in $^\circ$ en decimalen.

Herleid θ tot de eerste cirkel $[0^\circ, 360^\circ[$; stel θ gelijk aan $\theta - 360^\circ \cdot \left\lfloor \dfrac{\theta}{360^\circ} \right\rfloor$.

Basisformules :

[1]
$$\begin{cases} \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1. \\ \sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta). \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta). \end{cases}$$

Afgeleide formules :

[2]
$$\begin{cases} \sin(2 \cdot \theta) = 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta), \;\; \cos(2 \cdot \theta) = 1 - 2 \cdot \sin^2(\theta) = 2 \cdot \cos^2(\theta) - 1. \\ \sin^2\left[\dfrac{\theta}{2}\right] = \dfrac{1}{2} \cdot \big(1 - \cos(\theta)\big), \;\; \cos^2\left[\dfrac{\theta}{2}\right] = \dfrac{1}{2} \cdot \big(1 + \cos(\theta)\big). \end{cases}$$

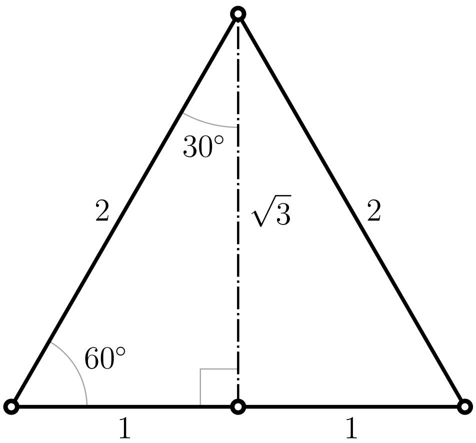
► 0°, 90°.

Beschouw een rechthoekige driehoek waarin de lengte van de schuine zijde gelijk is aan 1.
De sinus van een hoek is de verhouding van de overstaande rechthoekszijde tot de schuine zijde.
De cosinus van een hoek is de verhouding van de aanliggende rechthoekszijde tot de schuine zijde.

[3]
$$\begin{cases} \sin(0^\circ) = 0, \;\; \cos(0^\circ) = 1. \\ \sin(90^\circ) = 1, \;\; \cos(90^\circ) = 0. \end{cases}$$

► 30°.

Een gelijkzijdige driehoek is een driehoek met drie zijden van gelijke lengte.
Beschouw een gelijkzijdige driehoek waarin alle zijden 2 eenheden lang zijn.
In elke driehoek is de som van alle hoeken steeds de gestrekte hoek (180°).
In een gelijkzijdige driehoek zijn ook de drie hoeken gelijk, elk 60°.
De aslijn verdeelt de gelijkzijdige driehoek in twee gelijke (gespiegelde) rechthoekige driehoeken.
Beide rechthoekige driehoeken hebben als binnenhoeken 30°, 60°, en 90°.



Uit de stelling van *Pythagoras* volgt de lengte van de aslijn (rechthoekszijde) : $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.
Uit de definities van de sinus en cosinus in een rechthoekige driehoek volgen :

[4]
$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}, \;\; \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

▶ 15°.

$$\sin^2\left[\frac{30^\circ}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\big(1-\cos(30^\circ)\big) \Rightarrow \sin(15^\circ) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]}.$$

$$\cos^2\left[\frac{30^\circ}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\big(1+\cos(30^\circ)\big) \Rightarrow \cos(15^\circ) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]}.$$

In het eerste kwadrant gelden de positieve waarden :

[5] $$\boxed{\sin(15^\circ) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}},\ \cos(15^\circ) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}.}$$

▶ 18°.

Stel $\theta = 18^\circ \Rightarrow 5\cdot\theta = 90^\circ \Rightarrow 2\cdot\theta + 3\cdot\theta = 90^\circ \Rightarrow 2\cdot\theta = 90^\circ - 3\cdot\theta$.
$\sin(2\cdot\theta) = \sin(90^\circ - 3\cdot\theta) = \cos(3\cdot\theta)$.

$$\begin{aligned}\cos(3\cdot\theta) &= \cos(2\cdot\theta)\cdot\cos(\theta) - \sin(2\cdot\theta)\cdot\sin(\theta).\\ &= (2\cdot\cos^2(\theta)-1)\cdot\cos(\theta) - 2\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)\cdot\sin(\theta).\\ &= (2\cdot\cos^2(\theta)-1)\cdot\cos(\theta) - 2\cdot(1-\cos^2(\theta))\cdot\cos(\theta).\\ &= 2\cdot\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2\cdot\cos(\theta) + 2\cdot\cos^3(\theta) = 4\cdot\cos^3(\theta) - 3\cdot\cos(\theta).\\ &= (4\cdot\cos^2(\theta)-3)\cdot\cos(\theta) = (4\cdot(1-\sin^2(\theta))-3)\cdot\cos(\theta) = (1-4\cdot\sin^2(\theta))\cdot\cos(\theta).\end{aligned}$$

$\sin(2\cdot\theta) = \cos(3\cdot\theta) \Rightarrow 2\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\theta) = (1-4\cdot\sin^2(\theta))\cdot\cos(\theta)$.
$\cos(\theta) \neq 0 \Rightarrow 2\cdot\sin(\theta) = 1 - 4\cdot\sin^2(\theta)$.
Stel $x = \sin(\theta)$: $4\cdot x^2 + 2\cdot x - 1 = 0$.
Oplossingen van deze kwadratische vergelijking : $x = \dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 4\cdot(-1)}}{2\cdot 4} = \ldots = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$.

18° behoort tot het eerste kwadrant $\Rightarrow \sin(18^\circ) > 0$:

[6] $$\boxed{\sin(18^\circ) = \frac{1}{4}\cdot(\sqrt{5}-1),\ \cos(18^\circ) = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2\cdot(5+\sqrt{5})}.}$$

▶ 45°.

$$\sin^2\left[\frac{90^\circ}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\big(1-\cos(90^\circ)\big) \Rightarrow \sin(45^\circ) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(1-0)}.$$

$$\cos^2\left[\frac{90^\circ}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\big(1+\cos(90^\circ)\big) \Rightarrow \cos(45^\circ) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(1+0)}.$$

In het eerste kwadrant gelden de positieve waarden :

[7] $$\boxed{\sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

▶ 180°.

$\sin(2\cdot 90^\circ) = 2\cdot\sin(90^\circ)\cdot\cos(90^\circ) = 2\cdot 1\cdot 0$.
$\cos(2\cdot 90^\circ) = 1 - 2\cdot\sin^2(90^\circ) = 1 - 2\cdot 1^2$.

[8] $$\boxed{\sin(180^\circ) = 0,\ \cos(180^\circ) = -1.}$$

► 270°.

$\sin(180° + 90°) = \sin(180°) \cdot \cos(90°) + \cos(180°) \cdot \sin(90°) \Rightarrow \sin(270°) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1.$
$\cos(180° + 90°) = \cos(180°) \cdot \cos(90°) - \sin(180°) \cdot \sin(90°) \Rightarrow \cos(270°) = -1 \cdot 0 - 0 \cdot 1.$

[9] $$\boxed{\sin(270°) = -1,\ \cos(270°) = 0.}$$

► (Co)sinus van bijzondere hoeksommen en -verschillen.

$\sin(-\theta) = \sin(0° - \theta) = 0 \cdot \cos(\theta) - 1 \cdot \sin(\theta) = -\sin(\theta).$
$\sin(90° + \theta) = 1 \cdot \cos(\theta) + 0 \cdot \sin(\theta) = \cos(\theta).$
$\sin(90° - \theta) = 1 \cdot \cos(\theta) - 0 \cdot \sin(\theta) = \cos(\theta).$
$\sin(\theta - 90°) = \sin(\theta) \cdot 0 - \cos(\theta) \cdot 1 = -\cos(\theta).$
$\sin(180° + \theta) = 0 \cdot \cos(\theta) - 1 \cdot \sin(\theta) = -\sin(\theta).$
$\sin(180° - \theta) = 0 \cdot \cos(\theta) + 1 \cdot \sin(\theta) = \sin(\theta).$
$\sin(\theta - 180°) = \sin(\theta) \cdot (-1) - \cos(\theta) \cdot 0 = -\sin(\theta).$
$\sin(270° + \theta) = -1 \cdot \cos(\theta) + 0 \cdot \sin(\theta) = -\cos(\theta).$
$\sin(270° - \theta) = -1 \cdot \cos(\theta) - 0 \cdot \sin(\theta) = -\cos(\theta).$
$\sin(\theta - 270°) = \sin(\theta) \cdot 0 - \cos(\theta) \cdot (-1) = \cos(\theta).$
$\cos(-\theta) = \cos(0° - \theta) = 1 \cdot \cos(\theta) + 0 \cdot \sin(\theta) = \cos(\theta).$
$\cos(90° + \theta) = 0 \cdot \cos(\theta) - 1 \cdot \sin(\theta) = -\sin(\theta).$
$\cos(90° - \theta) = 0 \cdot \cos(\theta) + 1 \cdot \sin(\theta) = \sin(\theta).$
$\cos(\theta - 90°) = \cos(\theta) \cdot 0 + \sin(\theta) \cdot 1 = \sin(\theta).$
$\cos(180° + \theta) = -1 \cdot \cos(\theta) - 0 \cdot \sin(\theta) = -\cos(\theta).$
$\cos(180° - \theta) = -1 \cdot \cos(\theta) + 0 \cdot \sin(\theta) = -\cos(\theta).$
$\cos(\theta - 180°) = \cos(\theta) \cdot (-1) + \sin(\theta) \cdot 0 = -\cos(\theta).$
$\cos(270° + \theta) = 0 \cdot \cos(\theta) + 1 \cdot \sin(\theta) = \sin(\theta).$
$\cos(270° - \theta) = 0 \cdot \cos(\theta) - 1 \cdot \sin(\theta) = -\sin(\theta).$
$\cos(\theta - 270°) = \cos(\theta) \cdot 0 + \sin(\theta) \cdot (-1) = -\sin(\theta).$

Samengevat :

[10]

	$\pm\theta$	$90° \pm \theta$	$\theta - 90°$	$180° \pm \theta$	$\theta - 180°$	$270° \pm \theta$	$\theta - 270°$
sin()	$\pm\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	$-\cos(\theta)$	$\mp\sin(\theta)$	$-\sin(\theta)$	$-\cos(\theta)$	$\cos(\theta)$
cos()	$\cos(\theta)$	$\mp\sin(\theta)$	$\sin(\theta)$	$-\cos(\theta)$	$-\cos(\theta)$	$\pm\sin(\theta)$	$-\sin(\theta)$

De (co)sinus van elke hoek θ kan worden herleid tot de (co)sinus van een hoek in $[0°, 45°]$:

[11]
$$\begin{cases} \text{Als } 0° \leqslant \theta \leqslant 45° \text{ bepaal dan } \sin(\theta) \text{ en } \cos(\theta). \\ \text{Als } 45° \leqslant \theta \leqslant 90° \text{ dan } \sin(\theta) = \cos(90° - \theta) \text{ en } \cos(\theta) = \sin(90° - \theta). \\ \text{Als } 90° \leqslant \theta \leqslant 135° \text{ dan } \sin(\theta) = \cos(\theta - 90°) \text{ en } \cos(\theta) = -\sin(\theta - 90°). \\ \text{Als } 135° \leqslant \theta \leqslant 180° \text{ dan } \sin(\theta) = \sin(180° - \theta) \text{ en } \cos(\theta) = -\cos(180° - \theta). \\ \text{Als } 180° \leqslant \theta \leqslant 225° \text{ dan } \sin(\theta) = -\sin(\theta - 180°) \text{ en } \cos(\theta) = -\cos(\theta - 180°). \\ \text{Als } 225° \leqslant \theta \leqslant 270° \text{ dan } \sin(\theta) = -\cos(270° - \theta) \text{ en } \cos(\theta) = -\sin(270° - \theta). \\ \text{Als } 270° \leqslant \theta \leqslant 315° \text{ dan } \sin(\theta) = -\cos(\theta - 270°) \text{ en } \cos(\theta) = \sin(\theta - 270°). \\ \text{Als } 315° \leqslant \theta \leqslant 360° \text{ dan } \sin(\theta) = -\sin(360° - \theta) \text{ en } \cos(\theta) = \cos(360° - \theta). \end{cases}$$

► Veelvouden van 3°.

Hoek θ is een geheel veelvoud van 3° als $\theta - 3° \cdot \left\lfloor \dfrac{\theta}{3°} \right\rfloor = 0$.

$\sin(15°)$, $\cos(15°)$, $\sin(18°)$, en $\cos(18°)$ zijn berekenbaar. Met de basisformule voor het verschil van twee hoeken zijn $\sin(18° - 15°) = \sin(3°)$ en $\cos(18° - 15°) = \cos(3°)$ te bepalen, en met de basisformule voor de som van twee hoeken worden de sinus en cosinus van alle gehele veelvouden van 3° bekend.

Het volstaat om de (co)sinus van 0° (360°), 3°, 6°, 9°, 12°, 15°, 18°, 21°, 24°, 27°, 30°, 33°, 36°, 39°, 42°, 45°, 90°, 180°, en 270° te bepalen, om deze van alle overige gehele veelvouden van 3° te kennen.

De optimaal vereenvoudigde resultaten werden gecontroleerd met een calculator :

[12]

$$\begin{cases}
\sin(3°) = \frac{1}{8} \cdot \left[(\sqrt{5}-1) \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2 \cdot (2-\sqrt{3}) \cdot (5+\sqrt{5})}\right]. \\
\cos(3°) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6 \cdot (5+\sqrt{5})}}}. \\
\sin(6°) = \frac{1}{8} \cdot \left[\sqrt{6 \cdot (5-\sqrt{5})} - \sqrt{5} - 1\right], \ \cos(6°) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\sqrt{6 \cdot (5+\sqrt{5})} + \sqrt{5} + 7}. \\
\sin(9°) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (5+\sqrt{5})}}, \ \cos(9°) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (5+\sqrt{5})}}. \\
\sin(12°) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{6 \cdot (5-\sqrt{5})}}, \ \cos(12°) = \frac{1}{8} \cdot \left[\sqrt{6 \cdot (5+\sqrt{5})} + \sqrt{5} - 1\right]. \\
\sin(21°) = \frac{1}{8} \cdot \left[\sqrt{2 \cdot \left(4 + \sqrt{2 \cdot (5+\sqrt{5})}\right)} - \sqrt{6 \cdot \left(4 - \sqrt{2 \cdot (5+\sqrt{5})}\right)}\right]. \\
\cos(21°) = \frac{1}{8} \cdot \left[\sqrt{2 \cdot \left(4 - \sqrt{2 \cdot (5+\sqrt{5})}\right)} + \sqrt{6 \cdot \left(4 + \sqrt{2 \cdot (5+\sqrt{5})}\right)}\right]. \\
\sin(24°) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{7 + \sqrt{5} - \sqrt{6 \cdot (5+\sqrt{5})}}, \ \cos(24°) = \frac{1}{8} \cdot \left[1 + \sqrt{5} + \sqrt{6 \cdot (5-\sqrt{5})}\right]. \\
\sin(27°) = \frac{1}{8} \cdot \left[2 \cdot \sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{2} \cdot (1-\sqrt{5})\right], \ \cos(27°) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (5-\sqrt{5})}}. \\
\sin(33°) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{8 - 2 \cdot \sqrt{7 + \sqrt{5} - \sqrt{6 \cdot (5+\sqrt{5})}}}. \\
\cos(33°) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7 + \sqrt{5} - \sqrt{6 \cdot (5+\sqrt{5})}}}. \\
\sin(36°) = \frac{1}{8} \cdot (\sqrt{5}-1) \cdot \sqrt{2 \cdot (5+\sqrt{5})}, \ \cos(36°) = \frac{1}{4} \cdot (1+\sqrt{5}). \\
\sin(39°) = \frac{1}{8} \cdot \left[\sqrt{6 \cdot \left(4 - \sqrt{2 \cdot (5+\sqrt{5})}\right)} + \sqrt{2 \cdot \left(4 + \sqrt{2 \cdot (5+\sqrt{5})}\right)}\right]. \\
\cos(39°) = \frac{1}{8} \cdot \left[\sqrt{6 \cdot \left(4 + \sqrt{2 \cdot (5+\sqrt{5})}\right)} - \sqrt{2 \cdot \left(4 - \sqrt{2 \cdot (5+\sqrt{5})}\right)}\right]. \\
\sin(42°) = \frac{1}{8} \cdot \left[1 - \sqrt{5} + \sqrt{6 \cdot (5+\sqrt{5})}\right], \ \cos(42°) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{5} + \sqrt{6 \cdot (5-\sqrt{5})}}.
\end{cases}$$