CHUYÊN SAN EXP

interactive mathematics

www.intmath.com

ĐẠO HÀM, TÍCH PHÂN

Ứng dụng được gì?

"Tôi rất vui khi biết IntMath đã được dịch sang tiếng Việt. Tôi hi vọng rằng độc giả sẽ tìm thấy được nhiều kiến thức bổ ích trong cuốn sách này."

Murray Bourne

(người sở hữu trang web www.intmath.com)

ĐẠO HÀM, TÍCH PHÂN ỨNG DỤNG ĐƯỢC GÌ?

Tác giả: Murray Bourne, người sở hữu trang www.intmath.com.

Biên dịch: Võ Hoàng Trọng, thành viên chuyên san EXP, sinh viên khoa Toán – Tin học, trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh.

Chỉnh sửa: Đồng Phúc Thiên Quốc, chủ nhiệm chuyên san EXP, cử nhân khoa Toán – Tin học, trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh.

Trình bày bìa: Công ty trách nhiệm hữu hạn Công nghệ Thiết kế DUKES, 30 Nguyễn Văn Dung, Phường 6, Quận Gò Vấp, Tp. Hồ Chí Minh.

BẢN QUYỀN

Cuốn sách này được dịch từ 2 phần: "*Differentiation*" và "*Integration*" trên trang web www.intmath.com, tiêu đề "Đạo hàm, Tích phân ứng dụng được gì?" do người biên dịch tự ý đặt.

(i) Bản quyền với trang web IntMath:

Xuất bản theo sự cho phép của tác giả thông qua thư điện tử vào ngày 18 tháng 1 năm 2015.

Email **xin phép** dịch thuật từ thành viên của chuyên san EXP, Võ Hoàng Trọng:

"I've known this site since i was in high school and i'm very impressed. Your site so helpful for me. So, I want to translate some lessons of your site (like differentiation, intergral, etc..) into Vietnamese for studying and sharing to anyone who need. The production is a book or a file type.PDF upload on the internet and sharing for free.

No operation will be made. But first, I need your agreement (for copyright). So, can I do this?".

Email **chấp thuận** dịch thuật từ quản lý trang web IntMath, Murray Bourne:

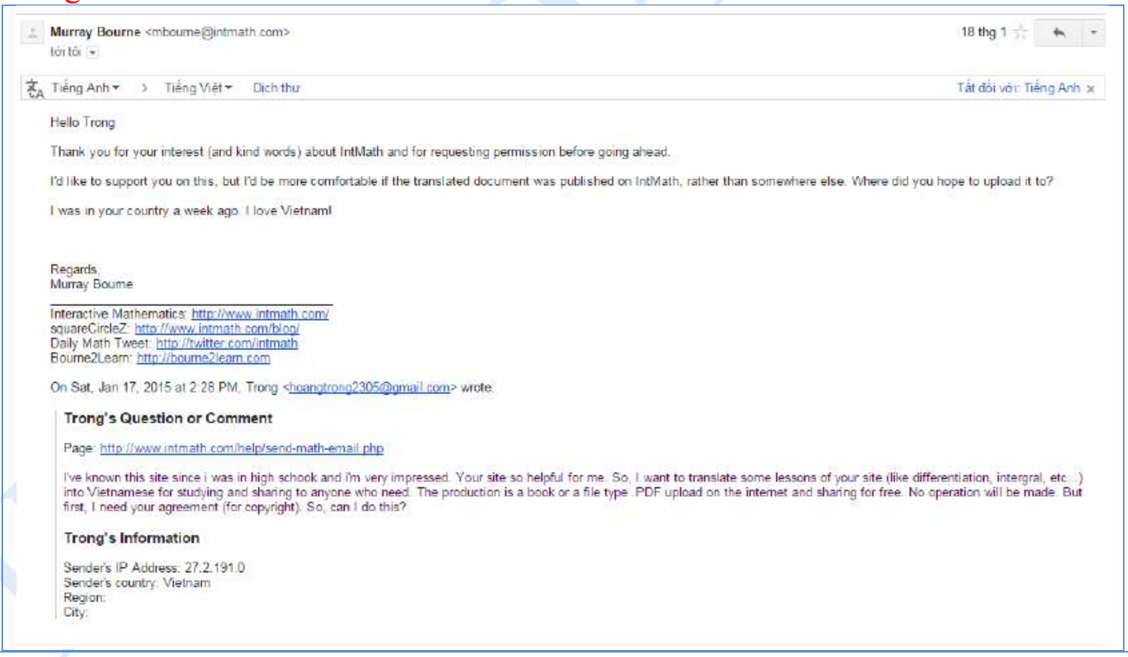
"Hello Trong.

Thank you for your interest (and kind words) about IntMath and for requesting permission before going ahead.

I'd like to support you on this, but I'd be more comfortable if the translated document was published on IntMath, rather than somewhere else. Where did you hope to upload it to?

I was in your country a week ago. I love Vietnam!".

Bằng chứng:



Murray Bourne <mbourne@intmath.com> 18 thg 1
tới tôi

Tiếng Anh > Tiếng Việt Dịch thư Tắt đối với: Tiếng Anh

Hello Trong

Thank you for your interest (and kind words) about IntMath and for requesting permission before going ahead.

I'd like to support you on this, but I'd be more comfortable if the translated document was published on IntMath, rather than somewhere else. Where did you hope to upload it to?

I was in your country a week ago. I love Vietnam!

Regards,
Murray Bourne

Interactive Mathematics: http://www.intmath.com/
squareCircleZ: http://www.intmath.com/blog/
Daily Math Tweet: http://twitter.com/intmath
Bourne2Learn: http://bourne2learn.com

On Sat, Jan 17, 2015 at 2:28 PM, Trong <hoangtrong2305@gmail.com> wrote:

Trong's Question or Comment

Page: http://www.intmath.com/help/send-math-email.php

I've known this site since i was in high schook and i'm very impressed. Your site so helpful for me. So, I want to translate some lessons of your site (like differentiation, intergral, etc...) into Vietnamese for studying and sharing to anyone who need. The production is a book or a file type .PDF upload on the internet and sharing for free. No operation will be made. But first, I need your agreement (for copyright). So, can I do this?

Trong's Information

Sender's IP Address: 27.2.191.0
Sender's country: Vietnam
Region:
City:

(ii) Bản quyền với Chuyên san EXP:

Tôi, Đồng Phúc Thiên Quốc, chủ nhiệm Chuyên san EXP, khoa Toán – Tin học, trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc Gia Thành phố Hồ Chí Minh đồng ý chỉnh sửa cuốn sách của tác giả Murray Bourne do thành viên Võ Hoàng Trọng biên dịch theo tiêu chuẩn của Chuyên san EXP.

Cuốn sách này được sử dụng miễn phí đến bất kỳ ai có nhu cầu đọc. Chúng tôi không ủng hộ

mọi hành vi kinh doanh có liên quan đến cuốn sách (bản tiếng Việt) này mà chưa thông qua ý kiến của Chuyên san EXP.
Các chỉnh sửa bao gồm:
(i) Thay đổi màu sắc theo tiêu chuẩn của EXP.
(ii) Đánh số, định dạng lại paragraph cho toàn văn bản.
(iii) Canh chỉnh kích thước hình ảnh, đóng khung, ….
(iv) Sửa lại các định dạng Toán học cũ, MathType sang định dạng Toán học mới, Equation.
(v) Định dạng lại các biểu thức để tương tác hoàn toàn với phần mềm Microsoft Mathematics (có thể sao chép - dán trực tiếp công thức mà không cần đánh máy lại).
(vi) Kiểm tra chính tả, lỗi tính toán, lỗi đánh máy sót.
(vii) Tính toán lại, định dạng sai số 9 chữ số thập phân (quy ước cho toàn bộ bài).

Nhóm chúng tôi hoan nghênh mọi sự góp ý, bình luận của bạn để cho cuốn sách được hoàn thiện hơn. Mọi phản hồi về cuốn sách này (phần tiếng Việt), độc giả có thể gửi email về địa chỉ:

hoangtrong2305@gmail.com

tiêu đề ghi [Phản hồi Đạo hàm, Tích phân ứng dụng được gì?].

Trân trọng cám ơn!

Thành phố Hồ Chí Minh, ngày 05 tháng 02 năm 2016.

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Chào bạn, tôi tên Võ Hoàng Trọng. Khi hoàn tất cuốn sách này, tôi là sinh viên năm 2, khoa Toán – Tin học, trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh.

Tôi hiện đang là thành viên Chuyên san EXP. Đây là một trong các sản phẩm của nhóm chuyên san EXP, trực thuộc CLB học thuật, khoa Toán - Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh. Trong hơn 3 năm qua nhóm chúng tôi đã thực hiện các dự án quy mô nhỏ nhằm cải thiện tình trạng giáo dục Việt Nam, hút lại chất xám từ nước ngoài trở về, và hiện đại hóa các công cụ Toán học trong nước.

Tôi tự nhận tôi là một đứa thích Toán. Khi tôi học cấp 3, tôi đã có thể tự giải những bài toán khó trên lớp mà không ai trong lớp giải được cũng như chẳng có ai hướng dẫn tôi cách làm, nhất là tích phân. Vào thời điểm ấy, tôi có thể ngồi hàng giờ liền chỉ để giải một bài tích phân nào đó và ngày hôm sau đem lên lớp nộp lấy điểm 10. Khi ấy, tôi đã biết khá nhiều cách giải các bài tích phân, tự mò có, tìm kiếm trên mạng cũng có, đương nhiên tôi lấy làm tự hào lắm.

Vào cuối năm 12, tôi tự hỏi: “Không biết nước ngoài họ học đạo hàm, tích phân như thế nào?”. Với bản tính tò mò, tôi lên Google tìm kiếm và tôi đã tiếp cận trang www.intmath.com. Cùng với trang tra từ trực tuyến tratu.soha.vn để dịch từ vựng, tôi tò mò xem cách mà trang web này nói về đạo hàm, tích phân và sau đó tôi đã bị cuốn hút, không phải vì trang này có những cách giải hay, nhiều phương pháp mới mà là những ứng dụng trong đời sống hàng ngày của đạo hàm, tích phân, ví dụ như chọn chỗ ngồi dễ quan sát nhất trong rạp phim, cách thiết kế khúc cua của con đường, xác định trọng tâm của vật thể, tính công sinh ra, … Ngoài ra, tôi còn biết được bản chất thực sự của tích phân là gì, dấu $\int$ từ đâu mà ra hay dx mang ý nghĩa gì. Cách hướng dẫn của trang web này song hành lý thuyết lẫn ứng dụng thực tiễn, tạo được sự thu hút đối với tôi và tôi quyết định dịch các bài trong trong trang web đó nhằm làm nguồn tài liệu cho riêng mình cũng như chia sẻ cho bất kỳ ai có nhu cầu đọc và tìm hiểu những ứng dụng của đạo hàm, tích phân trong cuộc sống.

Trước kia, tôi nghĩ tích phân là cái gì đó ghê gớm mà chỉ các bộ óc thiên tài mới nghĩ ra được, nhưng sau khi biết được lịch sử hình thành của chúng, tôi đã nghĩ sai. Sự thật thì ý tưởng hình thành khái niệm tích phân rất đơn giản và tôi tin ngay cả những học sinh lớp 6, lớp 7 cũng có thể hiểu được ý tưởng này. Đặc biệt hơn, những điều mà tôi nói ở trên hiếm khi được đề cập trong những tiết toán trên lớp. Còn việc tính tích phân ư? Trong lúc tôi còn không biết nên tính tích phân từng phần hay đặt ẩn như thế nào thì người ta đã nghiên cứu ra phương pháp lập trình trên máy tính và giải ra đáp số cho bất kỳ bài tích phân nào với độ chính xác đến kinh ngạc. “Người ta” ở đây chính là những người đã sống cách đây gần cả thế kỷ. Qua đó, tôi thấy rằng trình độ toán của mình đã tụt hậu xa so với Thế giới.

Tôi đã nghe nhiều bạn hỏi rằng: “Đạo hàm, tích phân có ứng dụng gì trong cuộc sống?” Đáng tiếc đây là phần thú vị và hấp dẫn nhất lại được đề cập quá ít trong sách giáo khoa. Hi vọng rằng qua cuốn sách này, bạn sẽ có câu trả lời.

Lời cuối cùng, tôi chân thành cám ơn ông Murray Bourne, tác giả trang www.intmath.com đã cho phép tôi dịch nguồn tài liệu từ trang web này.

Còn bây giờ, mời bạn bắt đầu hành trình khám phá những ứng dụng của đạo hàm, tích phân.

CHƯƠNG 1: TỔNG QUAN VỀ NGÀNH VI TÍCH PHÂN

Ngành vi tích phân nghiên cứu về những đại lượng biến thiên phi tuyến tính, được sử dụng rộng rãi trong các ngành khoa học và kỹ thuật, xuất phát từ những vấn đề mà chúng ta được học (như vận tốc, gia tốc, dòng điện trong mạch) trong thực tế không hề đơn giản, gọn gàng, đẹp đẽ. Nếu những đại lượng thay đổi 1 cách liên tục, chúng ta cần phép vi tích phân để tìm hiểu xem chuyện gì đã xảy ra với đại lượng đấy.

Ngành vi tích phân được phát triển bởi một nhà khoa học người Anh tên Issac Newton và một nhà khoa học người Đức là Gottfried Lebniz, 2 nhà khoa học này nghiên cứu 1 cách độc lập với nhau về những đại lượng biến thiên vào khoảng cuối thế kỷ 17. Đã có 1 cuộc tranh cãi rằng ai là người đầu tiên phát triển ngành vi tích phân, nhưng do 2 nhà khoa học này nghiên cứu độc lập với nhau nên chúng ta có sự hòa lẫn không được như ý về ký hiệu và cách diễn đạt khi dùng vi tích phân. Từ Lebniz ta có ký hiệu $\frac{dy}{dx}$ và $\int$.

	
Isaac Newton (1642 – 1726)	**Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716)**

Sự phát triển của đồng hồ chạy chính xác từng giây vào thế kỷ 17 mang lại nhiều ý nghĩa quan trọng trong khoa học nói chung và toán học nói riêng, và đỉnh cao của sự phát triển đó là ngành vi tích phân.

Đối với các nhà khoa học thì đây là điều rất quan trọng để có thể dự đoán vị trí của những ngôi sao, qua đó hỗ trợ cho ngành hàng hải. Thử thách lớn nhất của các thủy thủ khi đi biển chính là xác định kinh độ của con tàu ở ngoài khơi, bất kỳ quốc gia nào đưa tàu được đến Thế Giới Mới đều sẽ mang về rất nhiều vàng bạc châu báu, thực phẩm, qua đó quốc gia trên sẽ trở nên giàu có.

Newton và Lebniz xây dựng trên các phép toán đại số và hình học của Rene Descartes, người phát triển hệ tọa độ Descartes mà chúng ta đã gặp trong chương trình phổ thông.

Ngành vi tích phân này có 2 mảng chính:

Vi phân (hay đạo hàm) giúp chúng ta tìm ra tốc độ thay đổi của 1 đại lượng với 1 đại lượng khác.

Tích phân, ngược với vi phân. Chúng ta có thể được cho trước 1 giá trị biến thiên nào đó và ta phải làm điều ngược lại, tức tìm mối quan hệ ban đầu (hay phương trình ban đầu) giữa 2 đại lượng.

Thể tích thùng rượu là một trong những vấn đề.
được giải quyết bằng cách sử dụng phương pháp vi tích phân

I. VI TÍCH PHÂN TRONG HÀNH ĐỘNG 1

Một tháp năng lượng cung cấp điện từ mặt trời bằng cách thiết lập hàng ngàn tấm gương có khả năng điều chỉnh được, gọi là gương định nhật, mỗi tấm gương được đặt trên đỉnh tháp, thu năng lượng nhiệt từ mặt trời và cất giữ trong bể chứa những hạt muối đã được nấu chảy (nằm bên phải tháp) với nhiệt độ hơn $500°C$.

Khi cần dùng điện, năng lượng trong bể được dùng để tạo hơi nước truyền chuyển động cho turbine sinh ra điện (ở bên trái tháp).

Vi tích phân (cụ thể trong trường hợp này là đạo hàm) dùng để làm tăng tối đa công suất quá trình này.

Solar Two phục vụ cho đề án năng lượng ở California

II. VI TÍCH PHÂN TRONG HÀNH ĐỘNG 2

Vi tích phân dùng để phát triển năng suất ổ cứng và những thành phần khác của máy tính.

III. MỤC LỤC

Chương 2: Vi phân

Chương này có 3 phần gồm:

Phần 2.1 Vi phân: Giới thiệu sơ nét về đạo hàm và một số ví dụ cơ bản về kỹ thuật tính vi phân.

Phần 2.2 Ứng dụng của vi phân: Nơi ta sẽ khám phá một số ứng dụng cơ bản, bao gồm cả tìm tiếp tuyến, những vấn đề về chuyển động cong cũng như tối ưu hóa.

Phần 2.3 Vi phân hàm số siêu việt: Ta sẽ khám phá cách tìm đạo hàm của một số hàm số như hàm sine, cosine, logarithms và hàm số mũ.

Chương 3: Tích phân

Ba phần trong chương này là:

Phần 3.1 Tích phân: Ta sẽ khám phá một số nét cơ bản của tích phân.

Phần 3.2 Ứng dụng của tích phân: Nơi ta sẽ thấy vài ứng dụng cơ bản của tích phân gồm tính diện tích, thể tích, trọng tâm, moment quán tính, nạp điện tích và giá trị trung bình. Một điều thú vị là Archimedes đã nắm được vài yếu tố để hình thành nên vi tích phân trước cả Newton và Leibniz tận 2000 năm!

Phần 3.3 Công thức tính tích phân: Phần này sẽ cho các bạn thấy vài kỹ thuật tính tích phân.

Chương 4: Bài đọc thêm

Những câu chuyện lịch sử và một số cách tính vi tích phân khác sẽ được nêu trong chương này.

CHƯƠNG 2: VI PHÂN

PHẦN 2.1: VI PHÂN (TÌM ĐẠO HÀM)

BÀI 2.1.1 MỞ ĐẦU

Nội dung trong phần 2.1 này:

Bài 2.1.1 Mở đầu.

Bài 2.1.2 Giới hạn và vi phân.

Bài 2.1.3 Độ dốc của tiếp tuyến với đường cong (tính toán số).

Bài 2.1.4 Nguyên lý cơ bản để tính đạo hàm.

Bài 2.1.5 Đạo hàm với tốc độ thay đổi tức thời.

Bài 2.1.6 Đạo hàm đa thức.

Bài 2.1.7 Đạo hàm tích và thương.

Bài 2.1.8 Vi phân hàm số có lũy thừa.

Bài 2.1.9 Vi phân hàm ẩn.

Bài 2.1.10 Đạo hàm cấp cao.

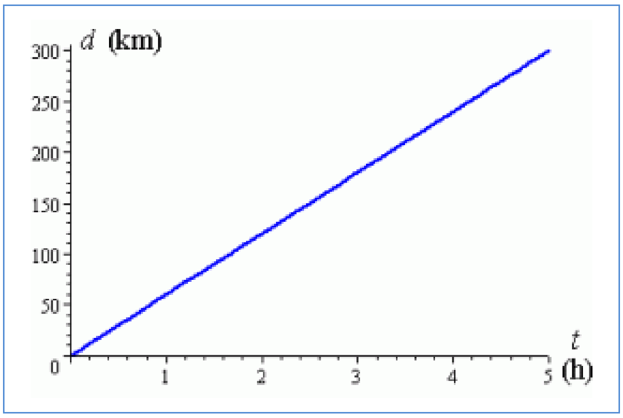
Bài 2.1.11 Đạo hàm riêng.

I. VI PHÂN LÀ GÌ?

Phép vi phân chủ yếu tìm tốc độ thay đổi của đại lượng này với đại lượng khác. Chúng ta cần phép vi phân khi tốc độ thay đổi không có giá trị cố định, điều này có nghĩa là gì?

II. TỐC ĐỘ THAY ĐỔI CỐ ĐỊNH

Đầu tiên, ta sẽ khảo sát một chiếc xe chuyển động với tốc độ 60 km/h, đồ thị quãng đường – thời gian sẽ như thế này:

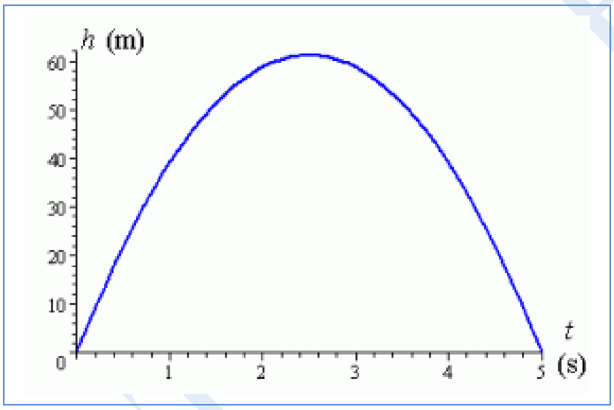


Chúng ta cần lưu ý rằng quãng đường tính từ điểm xuất phát tăng với hằng số cố định là $60km$ mỗi giờ, vì vậy sau $5h$ chiếc xe đi được $300km$. Chú ý rằng độ dốc (gradient) luôn là $\frac{300}{5} = 60$ trong toàn bộ đồ thị. Đây chính là tốc độ thay đổi cố định của quãng đường theo thời gian, độ dốc luôn dương (vì đồ thị đi lên khi bạn đi từ trái sang phải).

III. TỐC ĐỘ THAY ĐỔI KHÔNG CỐ ĐỊNH

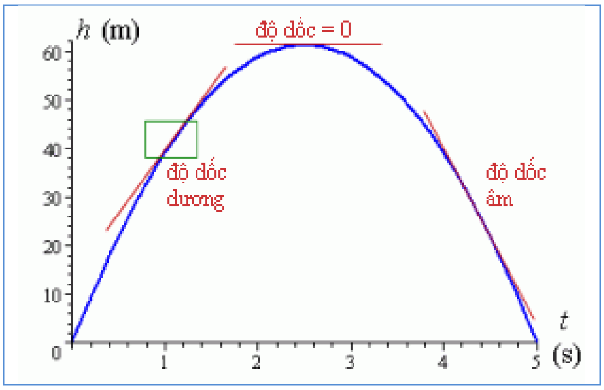
Bây giờ ta quăng quả bóng lên trời. Dưới tác dụng của trọng lực thì quả bóng di chuyển chậm dần, sau đó bắt đầu đi ngược chiều chuyển động ban đầu và rớt xuống. Trong suốt quá trình chuyển động thì vận tốc quả bóng thay đổi từ dương (khi quả bóng đi lên), chậm về 0, sau đó về âm (quả bóng rơi xuống). Trong quá trình đi lên, quả bóng có gia tốc âm và khi nó rơi xuống thì có gia tốc dương.

Ta có đồ thị mối liên hệ giữa độ cao $h(m)$ và thời gian $t(s)$.



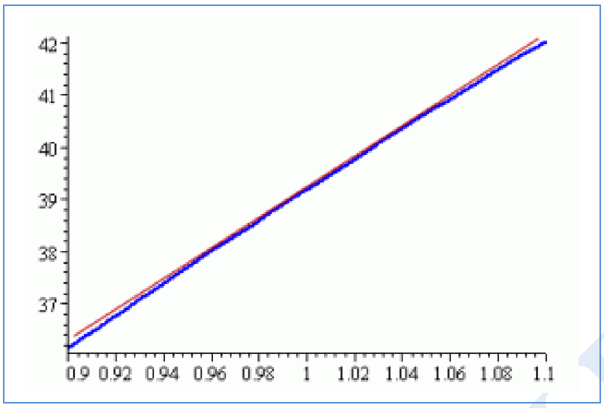
Lúc này độ dốc của đồ thị thay đổi trong suốt quá trình chuyển động. Ban đầu độ dốc khá lớn, có giá trị dương (biểu thị vận tốc lớn khi ta ném bóng), sau đó khi quả bóng chậm dần, độ dốc ngày càng ít và bằng 0 (khi quả bóng ở điểm cao nhất và vận tốc lúc đó bằng 0). Sau đó quả bóng bắt đầu rớt xuống và độ dốc chuyển sang âm (ứng với gia tốc âm) sau đó ngày càng dốc hơn khi vận tốc tăng lên.

Độ dốc của một đường cong tại 1 điểm cho ta biết tốc độ thay đổi của đại lượng tại điểm đó.



IV. KHÁI NIỆM QUAN TRỌNG: TÍNH XẤP XỈ CỦA ĐƯỜNG CONG

Bây giờ ta hãy phóng to một phần đồ thị gần vị trí $t = 1s$ (nơi tôi đánh dấu hình chữ nhật phía trên), quan sát một đoạn ngắn giữa vị trí $t = 0.9s$ và $t = 1.1s$, nó sẽ trông giống như thế này:



Lưu ý rằng khi ta phóng to đủ gần ở đường cong, nó bắt đầu giống như đường thẳng. Chúng ta có thể tìm giá trị xấp xỉ độ dốc của đường cong tại vị trí $t = 1$ (chính là độ dốc của tiếp tuyến của đường cong được vẽ màu đỏ) bằng cách quan sát những điểm mà đường cong đó đi qua gần $t = 1$ (tiếp tuyến là 1 đường thẳng tiếp xúc với đường cong tại duy nhất 1 điểm).

Quan sát đồ thị, ta thấy rằng đường cong ấy đi qua $(0.9; 36.2)$ và $(1.1; 42)$. Vậy độ dốc của tiếp tuyến tại vị trí $t = 1$ khoảng:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{42 - 36.2}{1.1 - 0.9} = 29\, m/s$$

Đơn vị là m/s giống như vận tốc, vậy chúng ta đã tìm được tốc độ thay đổi bằng cách nhìn vào độ dốc.

Rõ ràng, nếu chúng ta phóng to gần hơn, đường cong sẽ thẳng hơn và ta sẽ có giá trị xấp xỉ đúng hơn cho độ dốc của đường cong.

Ý tưởng của việc "phóng to" vào đồ thị và tìm giá trị xấp xỉ đúng nhất của độ dốc đường cong (cho ta biết được tốc độ thay đổi) dẫn đến sự phát triển của vi phân.

V. SỰ PHÁT TRIỂN CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN

Cho đến thời đại của Newton và Lebniz thì vẫn chưa có 1 cách chắc chắn để dự đoán hay miêu tả về hằng số biến đổi của vận tốc. Có 1 sự cần thiết thực tế để hiểu làm như thế nào ta có thể phân tích và dự đoán các đại lượng có hằng số biến thiên. Đó là lý do họ phát triển phép tính vi phân.

VI. TẠI SAO PHẢI NGHIÊN CỨU PHÉP TÍNH VI PHÂN?

Có rất nhiều ứng dụng của phép vi phân trong khoa học và kỹ thuật.

Vi phân còn được dùng trong việc phân tích về tài chính cũng như kinh tế.

Một ứng dụng quan trọng của vi phân đó là tối ưu hóa phạm vi, tức tìm điều kiện giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) xảy ra. Điều này rất quan trọng trong kinh doanh (tiết kiệm chi tiêu, gia tăng lợi ích) và kỹ thuật (độ dài lớn nhất, giá tiền nhỏ nhất).

VII. VÍ DỤ VỀ TỐI ƯU HÓA

Một hộp có đáy hình vuông được mở ở mặt trên. Nếu sử dụng vật liệu $64\ cm^2$ thì thể tích lớn nhất có thể của hộp là bao nhiêu?

Chúng ta sẽ giải quyết vấn đề này trong phần sau: Ứng dụng của vi phân.

VIII. TÍNH GẦN ĐÚNG MÀ CHÚNG TA SỬ DỤNG

Những tính gần đúng dưới đây đều có giá trị rất quan trọng:

Trị số gần đúng để tìm độ dốc.

Đại số gần đúng để tìm độ dốc.

Tập hợp những quy luật của vi phân.

Bạn có thể bỏ qua phần ứng dụng nếu bạn chỉ cần quan tâm đến cách tính vi phân, nhưng đây sẽ là một thiếu sót lớn vì bạn sẽ không biết được tại sao lại có cách đó.

BÀI 2.1.2 GIỚI HẠN VÀ VI PHÂN

Tiếp theo bài "Mở đầu", để hiểu rõ hơn về ngành này, trước tiên chúng ta phải hiểu về giới hạn.

I. GIỚI HẠN

Trong việc nghiên cứu về ngành vi tích phân, chúng ta sẽ cảm thấy thú vị về điều gì sẽ xảy ra với một hàm số khi các giá trị khác nhau thay vào hàm thì hàm đó đến gần để một giá trị cụ thể. Chúng ta đã bắt gặp điều này trong bài "Vi phân (đạo hàm)" khi phóng to đường cong để tìm giá trị xấp xỉ của độ dốc đường cong.

II. GIỚI HẠN KHI x TIẾN ĐẾN MỘT CON SỐ CỤ THỂ

Thỉnh thoảng việc tìm giá trị giới hạn của một biểu thức chỉ đơn giản là thế số.

Ví dụ 1: Tìm giới hạn khi t tiến đến 10 của biểu thức $P = 3t + 10$.

Trả lời ví dụ 1

Sử dụng ký hiệu giới hạn, ta viết như sau:

$$\lim_{t\to 10}(3t+7)$$

Ví dụ này không khó khăn gì cả, ta chỉ thế số 10 vào biểu thức và viết:

$$\lim_{t\to 10}(3t+7) = 37$$

Điều này hợp lý vì hàm $f(t) = 3t + 7$ là hàm liên tục.

Tuy nhiên có một vài trường hợp ta không thể áp dụng cách này.

Ví dụ 2: Trong biểu thức sau thì hiển nhiên x không thể bằng 3 (do mẫu số phải khác 0), hãy tìm giới hạn biểu thức khi x tiến đến 3:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$$

Trả lời ví dụ 2

Chúng ta có thể thấy hàm số tiến đến gần một giá trị cụ thể khi x tiến đến 3 từ bên trái:

x	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	...
$f(x)$	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	...

Tiếp tục tiến gần đến giá trị $x = 3$:

x	2.9	2.92	2.94	2.96	2.97	2.98	2.99	...
$f(x)$	3.9	3.92	3.94	3.96	3.97	3.98	3.99	...

Tương tự, tiến đến 3 từ bên phải cho ta giá trị giới hạn tương tự:

x	3.5	3.1	3.01	3.00001	...
$f(x)$	4.5	4.1	4.01	4.00001	...

Ta nhận thấy rằng các giá trị hàm tiến gần đến 4.

Ta viết:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=4$$

Chú ý: Ta có thể tìm giá trị giới hạn này bằng cách phân tích thành nhân tử:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+1)=4$$

Cách làm này đúng vì ta có $x\neq 3$.

Đây là ví dụ cơ bản nhằm giới thiệu việc nghiên cứu giới hạn. Nó có vẻ khá ngớ ngẩn vì những gì ta làm chả khác gì bài toán cấp 2, nhưng lại rất quan trọng vì nó thể hiện rằng hàm không tồn tại giá trị thực nào khi $x=3$, nhưng khi ta cho x ngày càng dần tới 3 thì giá trị hàm càng đi về một giá trị thực (như trong ví dụ trên là 4).

III. GIỚI HẠN KHI x TIẾN ĐẾN 0

Chúng ta phải nhớ rằng chúng ta không thể chia cho số 0.

Nhưng có một vài điều rất thú vị và quan trọng, đó là giới hạn khi x tiến đến 0 và nơi mà giá trị giới hạn xuất hiện khi ta có mẫu số bằng 0.

Ví dụ 3: Tìm giới hạn khi x tiến đến 0 của $\frac{\sin(x)}{x}$.

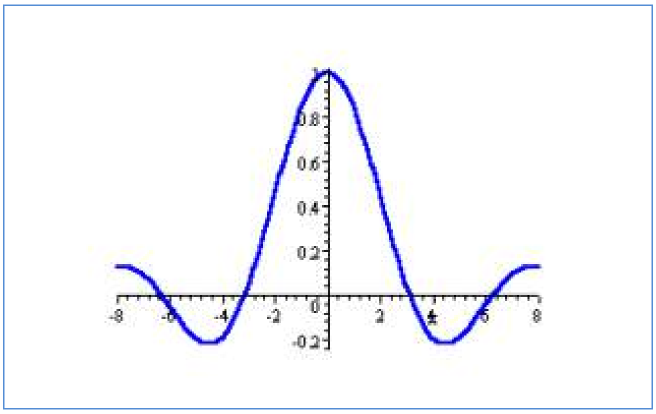
Trả lời ví dụ 3

Ta không thể thay số 0 vào biểu thức vì $\frac{\sin(0)}{0}$ không xác định.

Không có phương pháp đại số nào để tìm giới hạn này, nhưng ta có thể tìm bằng cách cho x tiến gần đến 0 từ bên trái và phải và có kết luận rằng:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

Một cách để kiểm chứng kết quả này đó là dựa vào đồ thị và ta thấy rằng giá trị hàm số khi x gần đến 0 là 1.



Có chỗ trống nơi $x = 0$ trong đồ thị nhưng nó quá nhỏ để chúng ta thấy được.

IV. GIỚI HẠN KHI x TIẾN ĐẾN VÔ CỰC

Ví dụ 4: Cho biểu thức $\frac{5}{x}$, chuyện gì sẽ xảy ra với biểu thức khi x tiến ra vô cực?

Trả lời ví dụ 4

Rõ ràng khi giá trị x càng lớn thì giá trị biểu thức ngày càng nhỏ cho đến khi đến sát giá trị 0, ta nói rằng "giới hạn của $\frac{5}{x}$ khi x tiến ra vô cực là 0".

V. GIỚI HẠN KHI GIÁ TRỊ BIẾN THIÊN Ở MẪU

Một cách tổng quát:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Tương tự:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Ta dùng những giá trị giới hạn này khi cần ước lượng giới hạn của các hàm số và đặc biệt hữu ích khi ta vẽ đồ thị đường cong.

Ví dụ 5: Tìm giới hạn:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5-3x}{6x+1}\right)$$

Trả lời ví dụ 5

Bài này không mấy rõ ràng giá trị giới hạn là bao nhiêu. Ta có thể thay x giá trị càng lớn dần vào biểu thức cho đến khi ta phát hiện điều gì khả quan (hãy thử với 100, rồi 1 000, rồi 1 000 000 và cứ thế).

Hoặc ta có thể sắp xếp biểu thức và dùng công thức:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

để tìm giá trị giới hạn.

Ta chia cả tử và mẫu cho x để tạo ra biểu thức mà ta có thể đánh giá được giá trị giới hạn.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5-3x}{6x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{5}{x}-3}{6+\frac{1}{x}}\right)=\frac{0-3}{6+0}=-\frac{1}{2}$$

Chú ý rằng ta không thay ký hiệu ∞ vào biểu thức $\frac{\frac{5}{x}-3}{6+\frac{1}{x}}$ vì nó không có nghĩa trong toán học.

Đừng viết $\frac{5-3\infty}{6\infty+1}$, điều này không đúng đâu nhé!

Ví dụ 6: Tìm giới hạn:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x^2}{8x^2+5}\right)$$

Trả lời ví dụ 6

Cách thế số: Thay các giá trị lớn dần vào biểu thức như 100, rồi 10 000, rồi 1 000 000, … và ta nhận thấy biểu thức tiến về $-\frac{1}{8}$.

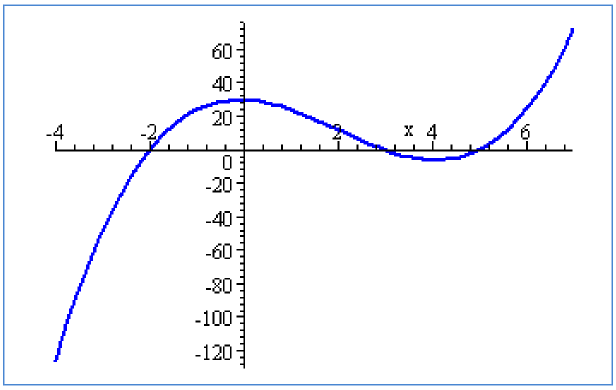
Cách đại số: Chia tử và mẫu cho x^2 rồi lấy giới hạn:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x^2}{8x^2+5}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x^2}-1}{8+\frac{5}{x^2}}\right)=-\frac{1}{8}$$

VI. TÍNH LIÊN TỤC VÀ VI PHÂN

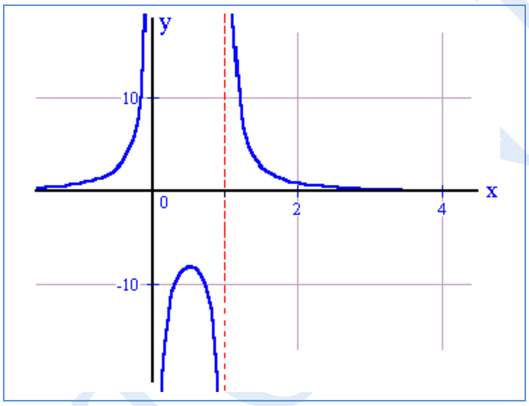
Trong phần này ta sẽ lấy vi phân của đa thức, sau đó ta sẽ giải quyết nhiều hàm khó hơn, có khi ta không thể lấy vi phân được. Ta cần phải hiểu điều kiện nào để một hàm có thể lấy vi phân.

Một hàm số như $f(x)=x^3-6x^2-x+30$ là hàm liên tục với mọi giá trị của x nên có thể lấy vi phân với mọi giá trị của x.



Tuy nhiên, hàm số như $f(x) = \frac{2}{x^2-x}$ không xác định tại $x = 0$ và $x = 1$.

Hàm không liên tục tại 2 điểm đó, vì vậy ta không thể lấy vi phân với những giá trị như vậy.



VII. HÀM SỐ NHIỀU PHƯƠNG TRÌNH VÀ VI PHÂN

Hàm số nhiều phương trình lấy được vi phân với mọi x nếu hàm số ấy liên tục với mọi x.

Ví dụ 7:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x < 1 \\ -x^2+2 & x \geq 1 \end{cases}$$

Hàm số này không liên tục tại $x = 1$, nhưng vẫn tồn tại giá trị tại $x = 1$ (cụ thể $f(1) = 1$). Hàm số này có vi phân với mọi x trừ giá trị $x = 1$ vì hàm không liên tục tại điểm trên.

BÀI 2.1.3 ĐỘ DỐC CỦA TIẾP TUYẾN VỚI ĐƯỜNG CONG (TÍNH TOÁN GIÁ TRỊ)

Trong bài viết này, tôi sẽ cho bạn thấy một trong những vấn đề có từ lâu, đó là tìm độ dốc tiếp tuyến của đường cong. Vấn đề này có trước khi vi phân ra đời.

Khi chúng ta mô hình hóa nhiều vấn đề vật lý bằng cách sử dụng đường cong, ta phải hiểu về độ dốc của đường cong ở nhiều điểm khác nhau và ý nghĩa của độ dốc trong những ứng dụng thực tế.

Hãy nhớ rằng: Ta đang cố gắng tìm tốc độ thay đổi của 1 đại lượng này so với đại lượng khác.

Những ứng dụng bao gồm:

+ Nhiệt độ thay đổi trong thời gian nhất định.

+ Vật tốc của 1 vật thể rơi tự do trong khoảng thời gian nhất định.

+ Dòng điện qua mạch trong thời gian nhất định.

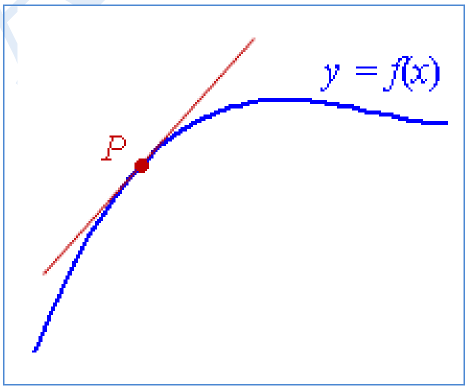
+ Sự biến thiên của thị trường chứng khoán trong khoảng thời gian nhất định.

+ Sự gia tăng dân số trong khoảng thời gian nhất định.

+ Nhiệt độ gia tăng theo tỉ trọng trong bình gas.

Sau đó, ta sẽ khám phá ra tốc độ thay đổi của những điều trên bằng cách lấy vi phân hàm số và thay thế giá trị thích hợp vào. Bây giờ, ta bắt đầu tìm tốc độ thay đổi một cách gần đúng (có nghĩa là ta thay số vào cho đến khi ta tìm được giá trị xấp xỉ phù hợp).

Ta quan sát trường hợp tổng quát và viết phương trình phù hợp bao gồm ẩn x (độc lập) và giá trị y (không độc lập).



Độ dốc của đường cong $y = f(x)$ tại điểm P chính là độ dốc tiếp tuyến tại P. Ta cần tìm độ dốc này để giải quyết nhiều ứng dụng vì nó cho ta biết tốc độ thay đổi một cách nhanh chóng.

Ta viết $y = f(x)$ trên đường cong vì y là hàm theo x, tức là, nếu x thay đổi thì y cũng thay đổi.

* Ký hiệu Δ:

Ở ký hiệu này, ta viết:

+ Thay đổi theo y là Δy.

+ Thay đổi theo x là Δx.

Theo định nghĩa này, độ dốc được cho bởi:

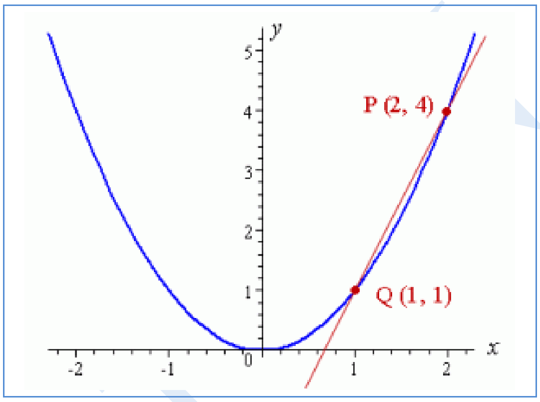
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ta dùng công thức này để tìm nghiệm bằng số độ dốc đường cong.

Ví dụ: Tìm độ dốc của đường cong $y = x^2$ tại điểm $(2; 4)$ sử dụng phương pháp tính bằng số.

Trả lời ví dụ

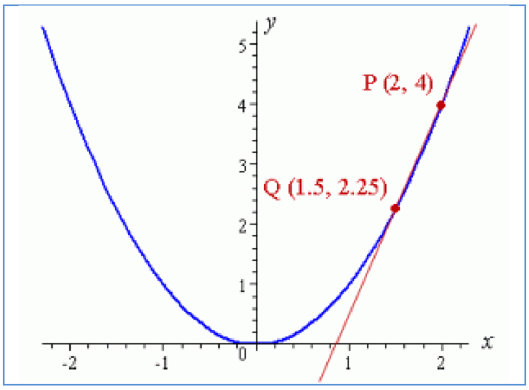
Ta bắt đầu với điểm $Q(1; 1)$ vì gần với điểm $P(2; 4)$.



Độ dốc của PQ tính bởi:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$$

Bây giờ ta di chuyển điểm Q quanh đường cong, tiến đến gần P, dùng điểm $Q(1.5; 2.25)$ gần với $P(2; 4)$.

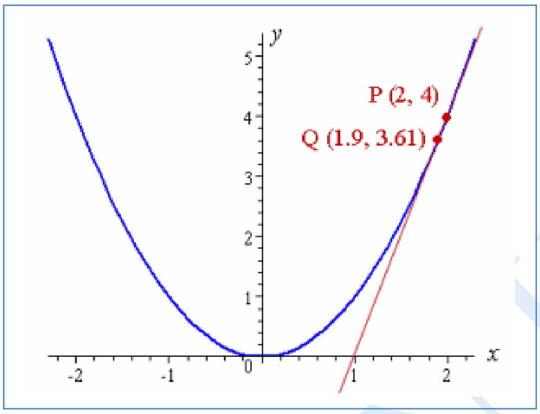


Dễ tính độ dốc đường cong PQ là $m = 3.5$.

Ta thấy đây là giá trị xấp xỉ phù hợp với độ dốc tiếp tuyến tại P, nhưng ta có thể tìm được giá trị xấp xỉ tốt hơn.

Bây giờ ta di chuyển Q lại gần P hơn nữa, giả sử $Q(1.9; 3.61)$.

Bây giờ ta có:



Vậy ta tính được $m = 3.9$.

Ta thấy ta đã gần tìm được giá trị độ dốc cần tìm.

Bây giờ nếu Q tiếp tục di chuyển đến $(1.99; 3.9601)$, độ dốc PQ là 3.99.

Nếu Q là $(1.999; 3.996\,001)$ thì độ dốc là 3.999.

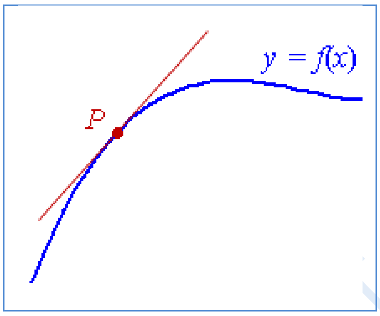
Rõ ràng, nếu $x \to 2$ thì độ dốc $PQ \to 4$, nhưng ta lưu ý rằng ta không được lấy $x = 2$ vì như vậy phân số của m có 0 ở mẫu, điều này là vô lý.

Ta đã tìm được tốc độ thay đổi của y theo x là 4 tại điểm $x = 2$.

BÀI 2.1.4 NGUYÊN LÝ CƠ BẢN ĐỂ TÍNH ĐẠO HÀM

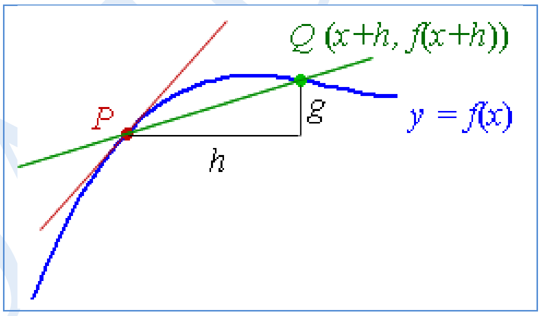
Trong bài này, chúng ta sẽ tính vi phân của một hàm bằng "nguyên lý cơ bản". Tức là chúng ta sẽ bắt đầu từ một mớ hỗn tạp và sau đó dùng đại số để tìm công thức tổng quát cho độ dốc đường cong ứng với mọi giá trị của x.

"Nguyên lý cơ bản" có thể hiểu là "công thức Δ "vì nhiều bài viết sử dụng ký hiệu Δx (ứng với sự thay đổi của x) và Δy (ứng với sự thay đổi của y). Điều này vô tình làm cho đại số thêm phức tạp, nên chúng ta dùng h thay thế cho Δx, ta vẫn gọi là "công thức Δ".



Ta tìm kiếm một cách thức đại số để tìm độ dốc của $y = f(x)$ tại P theo cách thay số mà ta đã xem trong bài "*Độ dốc của tiếp tuyến với đường cong (tính toán giá trị)*".

Ta có thể tính xấp xỉ giá trị này bằng cách lấy 1 điểm nào đó gần $P\big(x; f(x)\big)$, giả sử như $Q\big(x + h; f(x + h)\big)$.

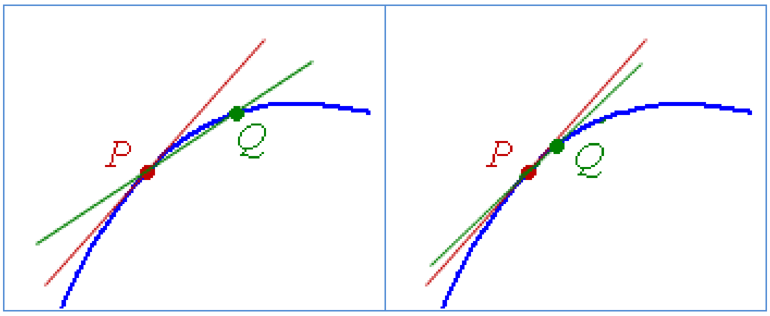


Giá trị $\frac{g}{h}$ là giá trị xấp xỉ của độ dốc tiếp tuyến ta đã yêu cầu.

Ta có thể viết độ dốc này là:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Nếu ta di chuyển Q ngày càng gần tới P, đường PQ sẽ gần trùng với tiếp tuyến tại P và độ dốc của PQ gần bằng với độ dốc ta cần tìm.



Nếu ta để Q trùng với P (tức $h = 0$) thì ta sẽ có chính xác độ dốc tiếp tuyến.

Bây giờ $\frac{g}{h}$ có thể viết thành:

$$\frac{g}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Tương đương độ dốc PQ là:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Nhưng ta đang tìm độ dốc tại P nên ta cho h dần tiến đến 0 dẫn đến Q tiến đến H và $\frac{g}{h}$ tiến tới độ dốc ta đang tìm.

I. ĐỘ DỐC ĐƯỜNG CONG THEO ĐẠO HÀM

Ta có thể viết độ dốc tiếp tuyến tại P là:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Đây chính là nguyên lý cơ bản để tính đạo hàm (hay công thức Δ) là tốc độ thay đổi tức thời của y theo x.

Điều này tương đương với điều sau (nơi trước đó ta đã dùng h thay cho Δx):

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Bạn có thể viết công thức Δ thành:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

II. LƯU Ý VỀ ĐẠO HÀM

QUAN TRỌNG: Đạo hàm (vi phân) có thể viết theo nhiều cách, điều này có thể dẫn đến một số phiền phức cho những bạn mới nghiên cứu vi phân:

Điều theo sau đây tương đương cách viết đạo hàm bậc 1 của $y = f(x)$: $\frac{dy}{dx}$ hoặc $f'(x)$ hoặc y'.

Ví dụ 1: Tìm $\frac{dy}{dx}$ khi $y = 2x^2 + 3x$.

Trả lời ví dụ 1

Ta có:

$$f(x) = 2x^2 + 3x$$

Nên:

$$f(x+h) = 2(x+h)^2 + 3(x+h) = 2x^2 + 4xh + 2h^2 + 3x + 3h$$

Bây giờ ta cần tìm:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(2x^2+4xh+2h^2+3x+3h)-(2x^2+3x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(4x+2h+3)\\ &= 4x+3\end{aligned}$$

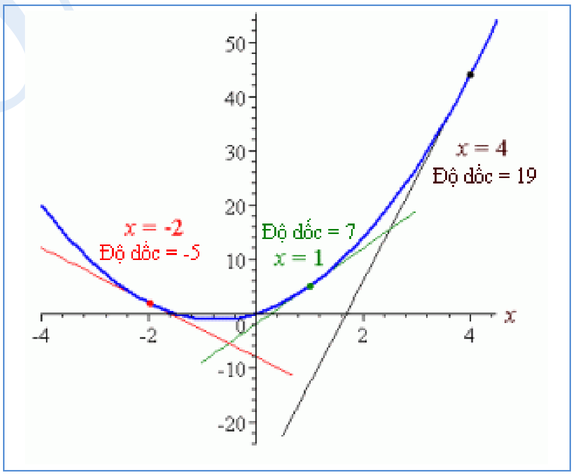
Chúng ta đã tìm ra biểu thức cho ta độ dốc tiếp tuyến ở bất kỳ nơi nào của đường cong.

Nếu $x = 2$ thì độ dốc là $4(-2) + 3 = -5$ (đường màu đỏ trong hình dưới).

Nếu $x = 1$ thì độ dốc là $4(1) + 3 = 7$ (xanh lá cây).

Nếu $x = 4$ thì độ dốc là $4 \times (4) + 3 = 19$ (đen).

Ta có thể thấy đáp án là đúng khi ta vẽ đường cong ra đồ thị (hình parabola) và nhận xét độ dốc tiếp tuyến.



Đây chính là điều làm cho vi tích phân rất hữu dụng, ta có thể tìm độ dốc bất cứ đâu trên đường cong (ứng với tốc độ thay đổi của hàm số ở bất cứ đâu).

Ví dụ 2:

a) Tìm y' của $y = x^2 + 4x$.

b) Tìm độ dốc tiếp tuyến tại $x = 1$ và $x = -6$.

c) Vẽ đường cong và cả 2 tiếp tuyến.

Trả lời ví dụ 2

a) Chú ý: y' tức "đạo hàm bậc 1", có thể viết thành $\frac{dy}{dx}$.

Đặt:

$$f(x) = x^2 + 4x$$

Ta được:

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 4(x+h) = x^2 + 2xh + h^2 + 4x + 4h$$

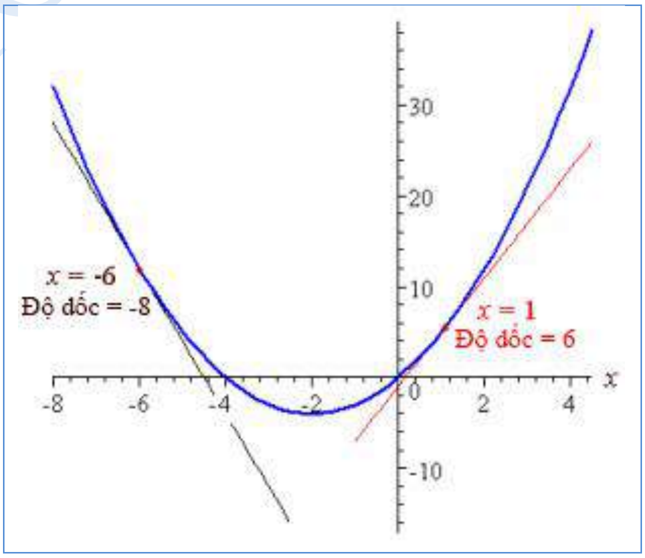
Vì vậy:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left((x+h)^2 + 4(x+h)\right) - (x^2 + 4x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2x + h + 4) \\ &= 2x + 4\end{aligned}$$

b) Khi $x = 1; m = 2(1) + 4 = 6$.

Khi $x = -6; m = 2(-6) + 4 = -8$.

c) Đồ thị:



BÀI 2.1.5 ĐẠO HÀM VỚI TỐC ĐỘ THAY ĐỔI TỨC THỜI

Đạo hàm cho ta biết tốc độ thay đổi của một đại lượng so với đại lượng khác ở vài vị trí hay điểm riêng biệt (nên ta gọi là "tốc độ thay đổi tức thời"). Khái niệm này có nhiều ứng dụng trong điện từ học, động lực học, kinh tế học, tràn chất lỏng, kiểu mẫu dân số, lý thuyết sắp hàng và còn nhiều nữa.

Bất cứ khi nào một số lượng luôn thay đổi giá trị, ta đều có thể dùng vi tích phân (vi phân và tích phân) để mô tả trạng thái của nó.

Trong bài này, ta sẽ bàn luận về những sự việc xảy ra trong những khoảng thời gian rất nhỏ, nên ta sẽ dùng Δt thay vì Δx như ta thấy ở bài "*Nguyên lý cơ bản để tính đạo hàm*".

Chú ý: Bài viết này là một phần của bài viết "*Tổng quan về ngành vi tích phân*". Ta sẽ nghiên cứu vài quy luật dễ hơn nhiều trong cách tính vi phân trong bài viết tiếp theo "*Đạo hàm đa thức*".

I. VẬN TỐC

Như ta đã biết, vận tốc chính là thương số giữa quãng đường và thời gian vật đi hết quãng đường đó, nhưng điều này chỉ đúng khi vận tốc là hằng số cố định (hay vật chuyển động đều). Ta cần một công thức khác khi vận tốc thay đổi theo thời gian.

Nếu ta có biểu thức cho s (quãng đường) theo t (thời gian) thì vận tốc ở bất kỳ thời điểm nhỏ t nào được tính bởi:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

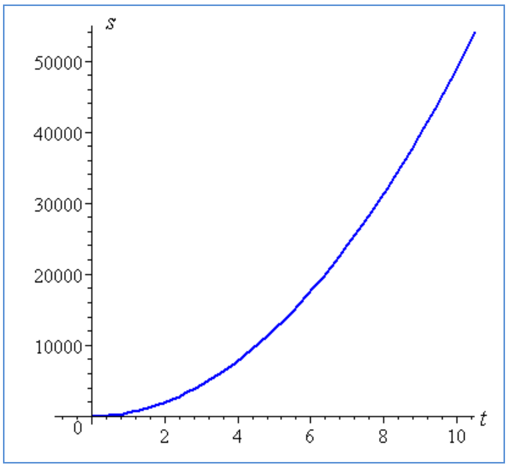
Để làm đại số trở nên đơn giản hơn, ta dùng h thay cho Δt và viết:

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Ví dụ: Một vật thể rơi từ cái giá đỡ được quãng đường s theo cm được cho bởi $s = 490t^2$, t tính theo giây (s), hỏi vận tốc vật thể khi $t = 10s$?

Trả lời ví dụ

Đây là đồ thị của s (quãng đường) theo thời gian (tính theo giây). Ta thấy rằng vận tốc (tương đương với độ dốc tiếp tuyến của đường cong) không cố định. Ban đầu, độ dốc là 0 (đường cong nằm ngang), theo thời gian, vật thể tăng tốc, độ dốc đường cong trở nên dốc hơn (thẳng đứng hơn).



Bây giờ vận tốc được tính bởi:

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Nên ta có:

$$\begin{aligned} v &= \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(490(t+h)^2) - (490t^2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \big(490(2t+h)\big) \\ &= 980t \end{aligned}$$

Nên $v = 980t$ là biểu thức cho ta biết vận tốc vật thể ở bất kỳ thời điểm nào $(t \geq 0)$.

Khi $t = 10s; v = 980 \cdot 10 = 9\,800\, cm/s$.

Nên vận tốc khi $t = 10s$ là $98\, m/s$.

Ta viết vận tốc là $v = \frac{ds}{dt}$ hay ta có thể viết $v = s'$.

Đạo hàm cho ta biết:

+ Tốc độ thay đổi của một đại lượng so với đại lượng khác.

+ Độ dốc tiếp tuyến của đường cong ở bất kỳ điểm nào.

+ Vận tốc khi ta biết biểu thức s quãng đường là $v = \frac{ds}{dt}$.

+ Gia tốc khi ta biết biểu thức v vận tốc là $a = \frac{dv}{dt}$.

II. CÂU HỎI ĐỘC GIẢ

Một người đọc thường hay hỏi:

"Ý nghĩa của $\frac{dy}{dt}$ là gì?".

Đây là câu trả lời của tôi:

Một cách đơn giản, $\frac{dy}{dt}$ nghĩa là "sự thay đổi của y so với sự thay đổi của t ở giá trị chính xác của t".

Khái niệm trên được dùng khi đại lượng y phụ thuộc vào một hằng số thay đổi. Để dễ hiểu hơn, ta hãy lấy nhiệt độ môi trường làm ví dụ. Giả sử bạn đang ở Melbourne, Úc (nơi có nhiệt độ chênh lệch khắc nghiệt), và ta muốn biết bây giờ nhiệt độ gia tăng nhanh đến mức nào.

Ở mùa đông, về đêm, nhiệt độ thông thường là $2°C$, ở mùa hè (6 tháng sau) về đêm, nhiệt độ có thể lên đến $26°C$. Tốc độ thay đổi trung bình là:

$$\frac{26-2}{6}=\frac{24}{6}=4\,°C/\text{tháng}$$

Đây là giá trị trung bình xa, không phải $\frac{dy}{dt}$.

Nhưng bây giờ hãy nghĩ về một ngày trong hè. Lúc $6{:}00$ sáng nhiệt độ có thể là $13°C$, và $1{:}00$ chiều lên đến $27°C$, giá trị thay đổi trung bình là:

$$\frac{27-13}{7}=2\,°C/h$$

Ta vẫn không có $\frac{dy}{dt}$.

Bây giờ hãy giả sử lúc $9{:}00$ sáng là $20°C$ và lúc $10{:}00$ sáng là $22.4°C$ nên giá trị thay đổi trung bình là:

$$\frac{22.4-20}{60}=0.04\,°C/\text{phút}\ \ (\text{tương đương } 2.4\,°C/h)$$

Ta có thể tiến đến những khoảng thời gian nhỏ hơn (như $s; ms; ns$ và hơn nữa) để dự đoán sự thay đổi nhiệt độ lúc $10{:}00$ sáng. Sự dự đoán này được biểu diễn bởi khái niệm $\frac{dy}{dt}$.

Nói một cách lịch sử, những gì tôi mô tả trong "*Độ dốc của tiếp tuyến với đường cong (tính toán giá trị)*" chính là những điều người xưa đã làm trước khi Newton và Leibniz cho ta phép tính vi phân.

Trong bài "*Nguyên lý cơ bản để tính đạo hàm*", ta thấy cách tiếp cận đại số mà Newton và Leibniz đã phát triển. Bây giờ ta có thể tìm giá trị dự đoán của $\frac{dy}{dt}$ bằng các quy trình toán học dựa trên hàm số mà không cần phải thay số trong mọi vị trí.

Ở bài viết tiếp theo ta sẽ thấy nhiều quy luật dễ hơn cho vi phân. Ta sẽ ít dùng "nguyên lý cơ bản" nhưng sẽ rất là tốt để nắm rõ vi phân xuất phát từ đâu và nó giúp ích gì cho ta.

BÀI 2.1.6 ĐẠO HÀM ĐA THỨC

Ta có thể tìm đạo hàm một đa thức mà không cần dùng công thức Δ ta đã gặp trong bài "*Nguyên lý cơ bản để tính đạo hàm*".

Isaac Newton và Gottfried Leibniz đã thu được những quy luật dưới đây vào đầu thế kỷ 18, họ đã theo cái "cơ bản" để tiến đến vi phân, từ đó làm cho cuộc sống chúng ta trở nên thuận tiện hơn.

Hằng số C	$\frac{dC}{dx} = 0$	Đây là điều cơ bản, tức là nếu một đại lượng có giá trị hằng số cố định, hiển nhiên tốc độ thay đổi của nó bằng 0.
Lũy thừa bậc n của x	$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	Chứng minh theo công thức Δ.
Tích có hằng số C	$\frac{d}{dx}(Cy) = C\frac{d}{dx}(y) = C\frac{dy}{dx}$	Ở đây y là một hàm số theo x, có nghĩa khi ta tìm đạo hàm của một hằng số nhân với hàm số đó thì cũng giống như tìm đạo hàm hàm số trước, sau đó nhân cho hằng số.
Đạo hàm tổng	$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$	Ở đây u và v là hàm số theo x, đạo hàm của tổng thì bằng với đạo hàm của cái đầu tiên cộng với đạo hàm của cái thứ hai. Nhưng điều này sẽ không còn đúng với đạo hàm tích 2 số mà ta sẽ gặp ở bài sau.

I. VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tính đạo hàm:

$$y = -7x^6$$

Trả lời ví dụ 1

Sử dụng quy tắc sau:

$$\frac{d}{dx}(Cy) = C\frac{dy}{dx}$$

Ta đưa -7 ra phía trước:

$$\frac{d}{dx}(-7x^6) = -7\frac{d}{dx}(x^6)$$

Và:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Cho ta:

$$-7\frac{d}{dx}(x^6) = -7\cdot 6x^5 = -42x^5$$

Chú ý: Ta có thể làm bước sau:

$$\frac{dy}{dx} = -42x^5$$

Ta có thể viết: $\frac{dy}{dx} = -42x^5$ hoặc $y' = -42x^5$ đều có nghĩa như nhau.

Ví dụ 2: Tính đạo hàm:

$$y = 3x^5 - 1$$

Trả lời ví dụ 2

$$y = 3x^5 - 1$$

Bây giờ:

$$\frac{d}{dx}(3x^5) = 3\cdot 5x^4 = 15x^4$$

Vì $\frac{dc}{dx} = 0$ nên ta viết:

$$\frac{d}{dx}(-1) = 0$$

Vậy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^5) + \frac{d}{dx}(-1) = 15x^4$$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm:

$$y = 13x^4 - 6x^3 - x - 1$$

Trả lời ví dụ 3

Bây giờ ta tính theo thứ tự:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(13x^4) = 52x^3, \qquad \left(\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}\right)\\
&\frac{d}{dx}(-6x^3) = -18x^2, \qquad \left(\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}\right)\\
&\frac{d}{dx}(-x) = -1, \qquad \left(-x = -1\cdot x^1;\ \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}\right)\\
&\frac{d}{dx}(-1) = 0, \qquad \left(\frac{dC}{dx} = 0\right)
\end{aligned}$$

Vậy:

$$\frac{dy}{dx} = 52x^3 - 18x^2 - 1$$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm:

$$y = -\frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{2}x^4 - 3^2$$

Trả lời ví dụ 4

$$y = -\frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{2}x^4 - 3^2$$

Lấy vi phân từng phần một, ta có:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{4}x^8\right) = -\frac{8}{4}x^7 = -2x^7$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^4\right) = \frac{4}{2}x^3 = 2x^3$$

$$\frac{d}{dx}(3^2) = 0$$

Vậy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{2}x^4 - 3^2\right) = -2x^7 + 2x^3$$

Ví dụ 5: Xác định đạo hàm:

$$y = x^4 - 9x^2 - 5x$$

tại điểm $(3; 15)$.

Trả lời ví dụ 5

$$y = x^4 - 9x^2 - 5x$$

Vậy:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 18x - 5$$

Tại điểm có $x = 3$ thì giá trị đạo hàm là:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = 4 \cdot 3^3 - 18 \cdot 3 - 5 = 49$$

Điều này có nghĩa độ dốc của đường cong $y = x^4 - 9x^2 - 5x$ tại $x = 3$ là 49.

Ví dụ 6: Tìm đạo hàm hàm số:

$$y = x^{1/4} - \frac{2}{x}$$

Trả lời ví dụ 6

Ở trường hợp này ta có phân số và số âm lũy thừa của x (nên đây không phải đa thức).

Quy luật vi phân vẫn được áp dụng:

$$y = x^{1/4} - \frac{2}{x}$$

Ta có thể viết lại thành:

$$y = x^{1/4} - 2x^{-1}$$

Vi phân cho ta:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{4}x^{(1/4)-1} - 2\cdot(-1)x^{-1-1}\\ &= \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + 2x^{-2}\\ &= \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{2}{x^2}\end{aligned}$$

II. BÀI TẬP

Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = 3x - x^3$ tại $x = 2$.

Trả lời

Ta có:

$$y = 3x - x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 - 3x^2$$

Và giá trị đạo hàm với $x = 2$ là:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = 3 - 3\cdot 2^2 = -9$$

Vì $y = 3x - x^3$ nên khi $x = 2$ thì $y = -2$.

Nên ta cần tìm phương trình đường thẳng đi qua $(2; -2)$ có độ dốc -9.

Sử dụng công thức tổng quát của phương trình đường thẳng:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ta được:

$$y + 2 = -9(x - 2)$$

Vậy phương trình cần tìm là:

$$y = -9x + 16$$

Hay viết dưới dạng tổng quát:

$$9x + y - 16 = 0$$

BÀI 2.1.7 ĐẠO HÀM TÍCH VÀ THƯƠNG

I. CÔNG THỨC TÍCH

Nếu u và v là 2 hàm số theo x thì đạo hàm tích uv được xác định bởi:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Phát biểu thành lời:

"Muốn đạo hàm tích hai hàm số, ta lấy hàm số thứ nhất nhân với đạo hàm hàm số thứ hai cộng với hàm số thứ hai nhân đạo hàm hàm số thứ nhất".

Công thức này từ đâu mà ra? Như nhiều công thức vi phân ta đã gặp đều được chứng minh dựa vào "*Nguyên lý cơ bản để tính đạo hàm*".

Ví dụ 1:

Nếu ta có tích 2 hàm số:

$$y = (2x^2 + 6x)(2x^3 + 5x^2)$$

Ta có thể tính đạo hàm trực tiếp mà không cần phải phá ngoặc nhân phân phối.

Trả lời ví dụ 1

Ta có 2 hàm số $u = 2x^2 + 6x$ và $v = 2x^3 + 5x^2$.

Ta dùng công thức tích:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Đầu tiên ta tính:

$$\frac{dv}{dx} = 6x^2 + 10x$$

Và:

$$\frac{du}{dx} = 4x + 6$$

Sau đó ta viết:

$$\begin{aligned}\frac{d(uv)}{dx} &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\\ &= (2x^2 + 6x)(6x^2 + 10x) + (2x^3 + 5x^2)(4x + 6)\\ &= 20x^4 + 88x^3 + 90x^2\end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm:

$$y = (x^3 - 6x)(2 - 4x^3)$$

Trả lời ví dụ 2

Nhận thấy dạng uv, cụ thể:

$$\begin{cases} u = x^3 - 6x \\ v = 2 - 4x^3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(uv)}{dx} &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \\ &= (x^3 - 6x)(-12x) + (2 - 4x^3)(3x^2 - 6) \\ &= -24x^5 + 96x^3 + 6x^2 - 12 \end{aligned}$$

Chú ý: Ta có thể viết công thức tích này theo nhiều cách:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Hay:

$$\frac{d\big(f(x)g(x)\big)}{dx} = f(x)\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\frac{df(x)}{dx}$$

Hoặc:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

II. CÔNG THỨC THƯƠNG (PHÂN SỐ)

Nếu u và v là 2 hàm số theo x thì đạo hàm thương $\frac{u}{v}$ được xác định bởi:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Phát biểu thành lời:

"Đạo hàm thương số bằng mẫu số nhân đạo hàm tử số trừ tử số nhân đạo hàm mẫu số tất cả chia cho mẫu số bình phương".

Ví dụ 3: Tính đạo hàm:

$$y = \frac{2x^3}{4 - x}$$

Trả lời ví dụ 3

Nhận thấy hàm số có dạng $\frac{u}{v}$, với $u = 2x^3$ và $v = 4 - x$.

Dùng công thức thương, ta được:

$$\frac{du}{dx} = 6x^2$$

Và:

$$\frac{dv}{dx} = -1$$

Lại có:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \\
&= \frac{(4-x)(6x^2) - (2x^3)(-1)}{(4-x)^2} \\
&= \frac{24x^2 - 4x^3}{(4-x)^2}
\end{aligned}$$

Ví dụ 4: Tìm $\frac{dy}{dx}$ của:

$$y = \frac{4x^2}{x^3 + 3}$$

Trả lời ví dụ 4

Ta đặt $u = 4x^2$ và $v = x^3 + 3$.

Dùng công thức thương, ta được:

$$\frac{du}{dx} = 8x$$
$$\frac{dv}{dx} = 3x^2$$

Lại có:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \\
&= \frac{(x^3+3)(8x) - (4x^2)(3x^2)}{(x^3+3)^2} \\
&= \frac{-4x^4 + 24x}{(x^3+3)^2}
\end{aligned}$$

Chú ý: Ta có thể viết công thức thương này theo nhiều cách:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

BÀI 2.1.8 VI PHÂN HÀM SỐ CÓ LŨY THỪA

I. HÀM HỢP

Nếu y là hàm số theo u, còn u là hàm số theo x thì ta nói: "y là hàm hợp theo x".

Ví dụ 1: Hãy mô tả phương trình:

$$y = (5x + 7)^{12}$$

Trả lời ví dụ 1

Nếu ta gọi $u = 5x + 7$ (biểu thức trong ngoặc) thì phương trình trên viết lại thành:

$$y = u^{12}$$

Ta đã viết y là hàm số theo u, và tương tự u là hàm số theo x.

Đây là khái niệm quan trọng trong vi phân. Những phương trình ta gặp đến bây giờ sẽ là phương trình trong phương trình và ta cần phải nhận diện chúng để có thể tính vi phân một cách chính xác.

II. QUY TẮC XÍCH

Để tìm đạo hàm hàm hợp, ta cần sử dụng quy tắc xích:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Điều này có nghĩa ta cần phải:

(i) Nhận diện u (luôn luôn chọn biểu thức nằm trong cùng, thường nằm trong ngoặc hay dưới dấu căn).

(ii) Sau đó ta cần ghi lại biểu thức y theo u.

(iii) Đạo hàm y (theo u) sau đó ta biểu diễn lại mọi thứ theo x.

(iv) Bước tiếp theo ta tìm $\frac{du}{dx}$.

(v) Nhân $\frac{dy}{du}$ với $\frac{du}{dx}$.

Ví dụ 2: Tìm $\frac{dy}{dx}$ của:

$$y = (x^2 + 3)^5$$

Trả lời ví dụ 2

Trong trường hợp này ta đặt $u = x^2 + 3$, từ đó ta được $y = u^5$.

Ta nhận thấy rằng:

+ u là hàm số theo x.

+ y là hàm số theo u.

Theo quy tắc xích, đầu tiên ta cần tìm $\frac{dy}{du}$ và $\frac{du}{dx}$.

$$\frac{dy}{du} = 5u^4 = 5(x^2+3)^4$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

Vậy:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \\ &= 5(x^2+3)^4(2x) \\ &= 10x(x^2+3)^4\end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tìm $\frac{dy}{dx}$ của:

$$y = \sqrt{4x^2 - x}$$

Trả lời ví dụ 3

Trong trường hợp này, ta đặt $u = 4x^2 - x$, từ đó ta được $y = \sqrt{u} = u^{1/2}$.

Một lần nữa:

+ u là hàm số theo x.

+ y là hàm số theo u.

Sử dụng quy tắc xích, ta cần tìm:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{4x^2 - x}}$$

Và:

$$\frac{du}{dx} = 8x - 1$$

Vì vậy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{8x-1}{2\sqrt{4x^2-x}}$$

III. ĐẠO HÀM HÀM SỐ CÓ LŨY THỪA

Mở rộng ra với quy tắc xích chính là công thức lũy thừa cho vi phân. Ta đang tìm đạo hàm của

u^n (lũy thừa của hàm số):

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Ví dụ 4: Ở phương trình sau:

$$y = (2x^3 - 1)^4$$

Ta có hàm số có lũy thừa.

Trả lời ví dụ 4

Nếu ta đặt $u = 2x^3 - 1$ thì $y = u^4$.

Vì vậy:

+ y là hàm số ẩn u lũy thừa.

+ u là hàm số ẩn x ($u = f(x)$).

Để tính đạo hàm biểu thức trên, ta có thể dùng công thức mới:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Với $u = 2x^3 - 1$ và $n = 4$.

Vì vậy:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(u^n) &= nu^{n-1}\frac{du}{dx}\\ &= (4(2x^3 - 1)^3)(6x^2)\\ &= 24x^2(2x^3 - 1)^3\end{aligned}$$

Đương nhiên ta có thể dùng quy tắc xích:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

IV. THỬ THÁCH

Tìm đạo hàm hàm số:

$$y = \frac{x^2(3x + 1)}{x^4 + 2}$$

Trả lời thử thách

Ở ví dụ này, ta có phân số với tử số là phép nhân.

Một lần nữa, ta có $y = \frac{u}{v}$, với $u = x^2(3x + 1)$ và $v = x^4 + 2$.

Công thức phân số yêu cầu dạng $\frac{du}{dx}$ nhưng u lại là tích.

Đặt $u = pq$ với $p = x^2$ và $q = 3x + 1$.

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= p\frac{dq}{dx} + q\frac{dp}{dx}\\ &= x^2 \cdot 3 + (3x+1)(2x)\\ &= 9x^2 + 2x\end{aligned}$$

Ngoài ra ta có:

$$\frac{dv}{dx} = 4x^3$$

Vì vậy:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} &= \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}\\ &= \frac{(x^4+2)(9x^2+2x) - (x^2)(3x+1)(4x^3)}{(x^4+2)^2}\\ &= \frac{-3x^6 - 2x^5 + 18x^2 + 4x}{(x^4+2)^2}\end{aligned}$$

BÀI 2.1.9 VI PHÂN HÀM ẨN

Chắc hẳn các bạn từng gặp những phương trình mà y không thể biểu diễn theo x chỉ bằng cách chuyển vế, chẳng hạn:

$$y^4 + 2x^2y^2 + 6x^2 = 7$$

Để tính $\frac{dy}{dx}$ theo những cách thông thường trước đây thì rất phức tạp để biến đổi y theo x, thậm chí là không thể.

Vậy ta phải có một cách nào đó để tính vi phân nhằm xác định tốc độ thay đổi của y khi x thay đổi. Để làm được điều này thì chúng ta cần biết đến vi phân hàm ẩn.

Hãy xem qua một số ví dụ sau:

Ví dụ 1: Tìm biểu thức $\frac{dy}{dx}$ nếu:

$$y^4 + x^5 - 7x^2 - 5x^{-1} = 0$$

Trả lời ví dụ 1

$$y^4 + x^5 - 7x^2 - 5x^{-1} = 0$$

Ở ví dụ này ta dễ dàng phân tích y theo x, từ đó tính vi phân một cách dễ dàng. Thế nhưng ta hãy sử dụng một cách khác để tìm vi phân xem.

Phần A: Tìm đạo hàm với x của y^4.

Để vi phân biểu thức này, ta coi như y là hàm theo x và sử dụng "*Đạo hàm hàm số có lũy thừa*".

Cơ bản: Tiến hành các bước tính đạo hàm:

$$\frac{d}{dx}(y) = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2\frac{dy}{dx}$$

Tương tự:

$$\frac{d}{dx}(y^4) = 4y^3\frac{dy}{dx}$$

Phần B: Tìm đạo hàm theo x của:

$$x^5 - 7x^2 - \frac{5}{x}$$

Đây là cách tính vi phân thuần túy:

$$\frac{d}{dx}\left(x^5 - 7x^2 - \frac{5}{x}\right) = 5x^4 - 14x + \frac{5}{x^2}$$

Phần C:

Ở vế phải của phương trình, đạo hàm của 0 là 0.

Bây giờ kết hợp phần $A; B; C$.

$$4y^3\frac{dy}{dx} + 5x^4 - 14x + \frac{5}{x^2} = 0$$

Chuyển vế ta được kết quả:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-5x^4 + 14x - \frac{5}{x^2}}{4y^3}$$

Ví dụ 2: Tìm độ dốc tiếp tuyến tại điểm $(2; -1)$ của đường cong:

$$2y + 5 - x^2 - y^3 = 0$$

Trả lời ví dụ 2

Đi từ trái sang phải, ta có:

Đạo hàm của $2y$:

$$\frac{d}{dx}(2y) = 2\frac{dy}{dx}$$

Đạo hàm của 5 là 0.

Đạo hàm của x^2 là $2x$.

Đạo hàm của y^3:

$$\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2\frac{dy}{dx}$$

Kết hợp lại, vi phân hàm ẩn trên cho ta:

$$2\frac{dy}{dx} - 2x - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

Thu gọn:

$$(2 - 3y^2)\frac{dy}{dx} = 2x$$

Vậy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2 - 3y^2}$$

Vậy khi $x = 2$ và $y = -1$:

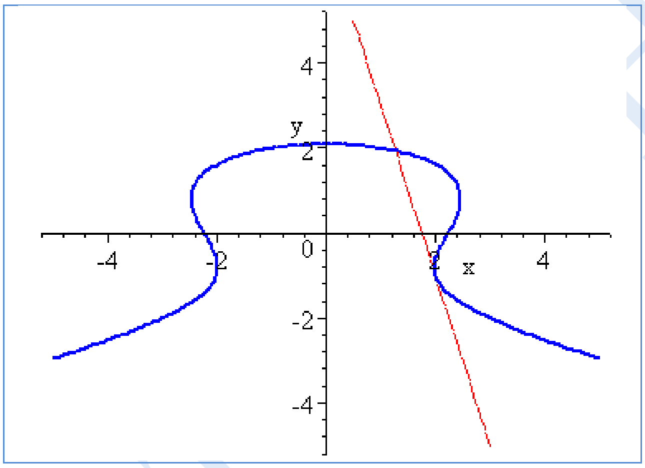
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cdot 2}{2 - 3 \cdot (-1)^2} = -4$$

Vậy độ dốc tiếp tuyến tại $(2; -1)$ là -4.

Hãy quan sát chúng ta làm gì, ta vẽ đồ thị đường cong:

$$2y + 5 - x^2 - y^3 = 0$$

Sau đó ta vẽ tiếp tuyến tại $(2; -1)$, quả thực độ dốc tiếp tuyến là -4.



Ví dụ 3: (Bao gồm công thức tích).

Tính $\frac{dy}{dx}$ của:

$$y^4 + 2x^2y^2 + 6x^2 = 7$$

(đây chính là ví dụ đã nêu ở đầu bài).

Trả lời ví dụ 3

Để đơn giản hóa vấn đề, ta chia nhỏ câu hỏi thành nhiều phần.

Phần A: Tìm đạo hàm theo x của y^4.

$$\frac{d}{dx}(y^4) = 4y^3\frac{dy}{dx}$$

Phần B: Tìm đạo hàm theo x của $2x^2y^2$.

Để tính đạo hàm của $2x^2y^2$ theo x ta cần nhận thấy đây là một tích.

Nếu ta đặt $u = 2x^2$ và $v = y^2$ thì ta có:

$$\frac{d}{dx}(2x^2y^2) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = (2x^2)\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + (y^2)(4x) = 4x^2y\frac{dy}{dx} + 4xy^2$$

Phần C:

Bây giờ:

$$\frac{d}{dx}(6x^2) = 12x$$

Và:

$$\frac{d}{dx}(7) = 0$$

Bây giờ để tìm $\frac{dy}{dx}$ của toàn bộ biểu thức:

$$y^4 + 2x^2y^2 + 6x^2 = 7$$

Tiến hành từ trái sang phải, sử dụng câu trả lời từ những phần trên:

$$\left(4y^3\frac{dy}{dx}\right) + \left(4x^2y\frac{dy}{dx} + 4xy^2\right) + (12x) = 0$$

Rút gọn, chuyển vế, ta được kết quả:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy^2 + 3x}{y^3 + x^2y}$$

BÀI 2.1.10 ĐẠO HÀM CẤP CAO

Ta có thể tính đạo hàm của đạo hàm, có nghĩa là:

+ Đạo hàm cấp 2 bằng cách đạo hàm của đạo hàm đầu tiên.

+ Đạo hàm cấp 3 bằng cách đạo hàm của đạo hàm cấp 2.

Ví dụ 1: Cho biểu thức:

$$x^5 + 3x^3 - 2x + 7$$

Hỏi đạo hàm cấp cao hơn của biểu thức này là gì?

Trả lời ví dụ 1

Đạo hàm cấp 1:

$$\frac{dy}{dx} = y' = 5x^4 + 9x^2 - 2$$

Bây giờ để tìm đạo hàm cấp 2, ta chỉ việc vi phân phương trình đạo hàm cấp 1:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = 20x^3 + 18x$$

Tiếp tục tìm đạo hàm cấp 3, cấp 4:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = 60x^2 + 18$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = y^{(4)} = 120x$$

Đạo hàm cấp 5 là:

$$y^{(5)} = 120$$

Đạo hàm cấp 6; 7; 8; ... đều có kết quả đạo hàm là 0 do đạo hàm của một hằng số bằng 0.

I. ỨNG DỤNG: GIA TỐC

Như ta đã biết gia tốc chính là tốc độ thay đổi của vận tốc.

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Nhưng đồng thời vận tốc cũng chính là tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Vì vậy đạo hàm cấp hai của độ dịch chuyển sẽ cho ta gia tốc:

$$a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Ví dụ 2: Cho phương trình chuyển động (tính theo m) theo thời gian t (tính theo s) của một vật thể là:

$$s = 4t^3 + 7t^2 - 2t$$

Tính gia tốc vật thể tại $t = 10$.

Trả lời ví dụ 2

$$s = 4t^3 + 7t^2 - 2t$$

$$v = \frac{ds}{dt} = 12t^2 + 14t - 2$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 24t + 14$$

Tại thời điểm $t = 10$ thì vật có gia tốc là:

$$a = 24 \cdot 10 + 14 = 254\, m/s^2$$

II. ĐẠO HÀM CẤP CAO CỦA HÀM ẨN

Ví dụ 3:

a) Tìm đạo hàm cấp 2 của hàm ẩn:

$$xy + y^2 = 4$$

b) Tìm giá trị đạo hàm cấp 2 của hàm ẩn ở phần a) với $x = 2$ và $y > 0$.

Trả lời ví dụ 3 câu a)

Đạo hàm cấp 1:

+ Ta có xy là tích nên ta dùng công thức tích để làm:

$$\frac{d}{dx}(xy) = xy' + y$$

+ Ta đã nghiên cứu về vi phân hàm ẩn ở bài trước:

$$\frac{d}{dx}(y^2) = 2y\frac{dy}{dx}$$

Ta có thể viết lại là:

$$\frac{d}{dx}(y^2) = 2yy'$$

+ Ráp lại và ta đã có đạo hàm bậc 1 của phương trình:

$$xy' + y + 2yy' = 0$$

+ (Ở đây tôi sử dụng y' thay cho $\frac{dy}{dx}$ để thuận tiện hơn trong việc đọc và viết).

+ Tôi đã sử dụng công thức tích (cho tích xy) và quy tắc xích cho y^2.

Đạo hàm cấp 2:

$$(xy'' + y') + (y') + \left(2yy'' + y'(2y')\right) = 0$$

+ Đơn giản hóa, ta được:

$$(x + 2y)y'' + 2y' + 2(y')^2 = 0$$

+ Ta có thể giải theo y''.

$$y'' = -\frac{2y' + 2(y')^2}{x + 2y}$$

Trả lời ví dụ 3 câu b)

Ta cần tìm y với $x = 2$.

Thay vào phương trình, ta được:

$$2y + y^2 = 4$$

Giải phương trình bậc hai này, kết hợp điều kiện $y > 0$, ta được:

$$y = -1 + \sqrt{5}$$

Ta cũng cần tìm giá trị $\frac{dy}{dx}$ khi $x = 2$.

Ta đã tìm phương trình đạo hàm đầu tiên là:

$$x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Giải theo $\frac{dy}{dx}$, ta được:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x + 2y}$$

Thay $x = 2; y = -1 + \sqrt{5}$ ta được kết quả (xấp xỉ):

$$y' = \frac{dy}{dx} \approx -0.276$$

Tiếp tục thay vào phương trình đạo hàm cấp hai đã tìm ở phần a) để tìm ra câu trả lời:

$$y'' = -\frac{2y' + 2(y')^2}{x + 2y} \approx 0.0894$$

BÀI 2.1.11 ĐẠO HÀM RIÊNG

Ta đã nghiên cứu về các hàm chỉ duy nhất 1 biến số. Tuy nhiên, nhiều phương trình trong toán học xuất hiện 2 hay nhiều biến. Trong bài này ta sẽ nghiên cứu cách tính đạo hàm của hàm số có nhiều hơn 1 ẩn.

Bài viết này có liên quan nhưng không giống với một bài viết ta đã gặp trước đó là vi phân hàm ẩn.

Ví dụ 1: Hàm số có 2 biến:

Đây là hàm số có 2 biến số là x và y:

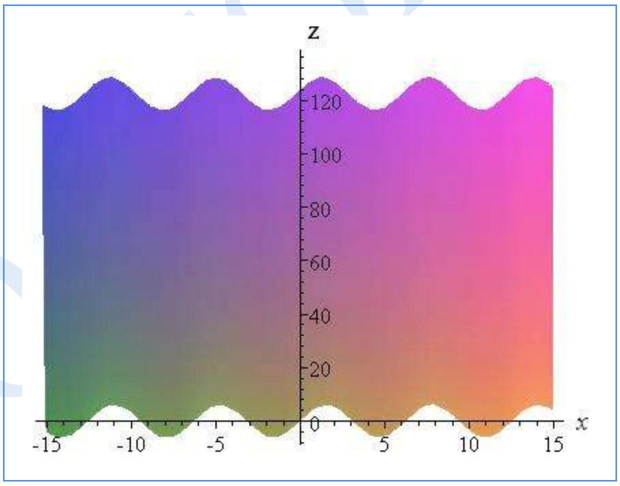
$$F(x;y) = y + 6\sin(x) + 5y^2$$

Để vẽ đồ thị hàm số này ta cần đến tọa độ không gian $Oxyz$.

I. VI PHÂN RIÊNG THEO x

"Đạo hàm riêng theo x" có nghĩa "Xem tất cả các ký tự khác như hằng số và chỉ vi phân phần có x".

Ở ví dụ trên (cũng như những phương trình có chứa 2 biến) thì đạo hàm riêng liên quan đến x có nghĩa là (cũng như trong thực tế) ta có thể xoay đồ thị và nhìn từ trục y. Ta đang nhìn vào mặt phẳng $x - z$.



Ta thấy rằng đường cong hàm sin di chuyển theo trục x, điều này xuất phát từ $6\sin(x)$ ở trong phương trình.

$$F(x;y) = y + 6\sin(x) + 5y^2$$

Phần y ta có thể xem như là hằng số (trong trường hợp này có thể xem là 0).

Bây giờ ta đạo hàm riêng của:

$$F(x;y) = y + 6\sin(x) + 5y^2$$

tính theo x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6\cos(x)$$

Đạo hàm của $6\sin(x)$ là $6\cos(x)$, còn đạo hàm của y là 0 do y được xem như là hằng số.

Cần lưu ý rằng ta dùng ký hiệu ∂ biểu hiện cho "vi phân riêng" trong khi d dùng để ký hiệu cho phép vi phân thông thường.

II. VI PHÂN RIÊNG THEO y

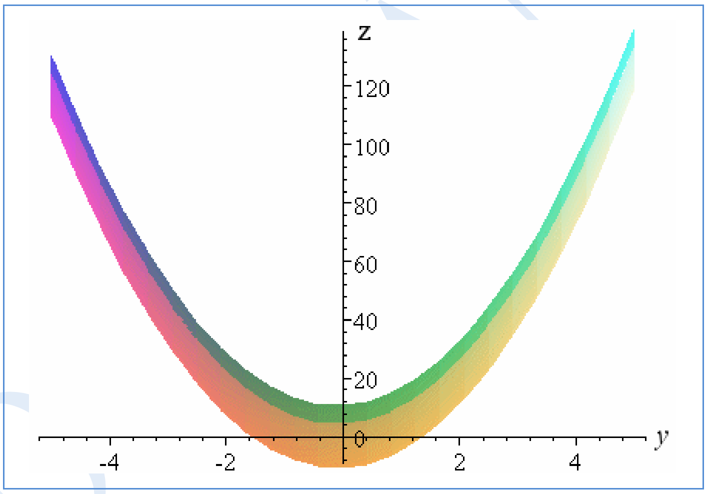
Thuật ngữ: "Vi phân riêng theo y" nghĩa là: "Giả sử tất cả các ký tự là hằng số ngoại trừ y để vi phân".

Như ta đã làm ở phần trên, ta xoay đồ thị và nhìn theo trục x, vì vậy ta thấy mặt phẳng Oyz.

Ta thấy một hình parabola, điều này xảy ra do số hạng y^2 và y trong:

$$F(x; y) = y + 6\sin(x) + 5y^2$$

còn $6\sin(x)$ bây giờ được xem như là hằng số:



Bây giờ để đạo hàm riêng của $F(x; y) = y + 6\sin(x) + 5y^2$.

+ Theo x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6\cos(x)$$

+ Theo y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 10y$$

Đạo hàm của phần tử có y là $1 + 10y$. Đạo hàm của $6\sin(x)$ là 0 vì phần tử này được xem như là hằng số khi ta vi phân theo y.

III. ĐẠO HÀM RIÊNG BẬC 2

Ta có thể tìm 4 đạo hàm riêng bậc 2 khác nhau. Hãy xem qua những ví dụ sau:

Ví dụ 2: Với phương trình:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6\cos(x)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 10y$$

Hãy xác định:

$a)\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$	$b)\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$	$c)\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$	$d)\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

Trả lời ví dụ 2 câu a)

Ta viết lại:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

Biểu thức này có nghĩa: “Đầu tiên ta tìm đạo hàm riêng theo x của hàm F (phần trong ngoặc), sau đó tìm đạo hàm riêng theo y của kết quả vừa thu được”.

Ở ví dụ $F(x;y) = y + 6\sin(x) + 5y^2$ trên, ta đã tìm được:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6\cos(x)$$

Để tìm $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$, ta cần tìm đạo hàm riêng theo y của $\frac{\partial F}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(6\cos(x)) = 0$$

Vì $\cos(x)$ là hằng số (khi ta tính vi phân riêng theo y) nên đạo hàm của nó bằng 0.

Trả lời ví dụ 2 câu b)

Ta viết lại:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

Biểu thức này có nghĩa: “Tìm đạo hàm riêng theo x của đạo hàm riêng theo y”.

Ở ví dụ $F(x;y) = y + 6\sin(x) + 5y^2$ trên, ta đã tìm được:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 10y$$

Để tìm $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, ta cần tìm đạo hàm riêng theo x của $\frac{\partial F}{\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(1 + 10y) = 0$$

Do là hằng số (khi ta tính vi phân riêng theo x) nên đạo hàm của nó bằng 0.

Trả lời ví dụ 2 câu c)

Ta viết lại:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

Biểu thức này có nghĩa: "Tìm đạo hàm riêng theo x của đạo hàm riêng theo x".

Ở ví dụ $F(x; y) = y + 6\sin(x) + 5y^2$ trên, ta đã tìm được:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6\cos(x)$$

Để tìm $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, ta cần tìm đạo hàm riêng theo x của $\frac{\partial F}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(6\cos(x)) = -6\sin(x)$$

Trả lời ví dụ 2 câu d)

Ta viết lại:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

Biểu thức này có nghĩa: "Tìm đạo hàm riêng theo y của đạo hàm riêng theo y".

Ở ví dụ $F(x; y) = y + 6\sin(x) + 5y^2$ trên, ta đã tìm được:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 10y$$

Để tìm $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ ta cần tìm đạo hàm riêng theo y của $\frac{\partial F}{\partial y}$:

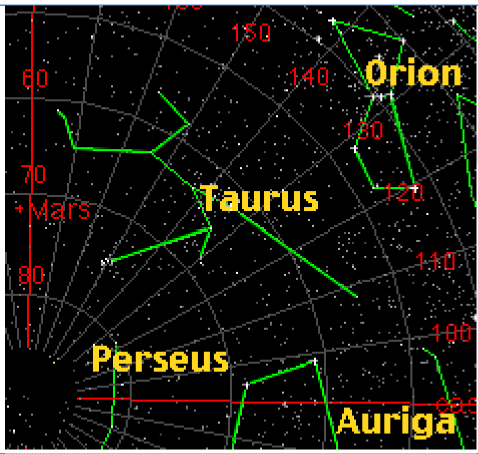
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(1 + 10y) = 10$$

PHẦN 2.2: ỨNG DỤNG CỦA VI PHÂN

BÀI 2.2.1 GIỚI THIỆU VỀ VI PHÂN ỨNG DỤNG

Trong thời đại của Issac Newton, một vấn đề đáng quan tâm đó là có quá ít phương tiện di chuyển bằng đường biển.

Nạn đắm tàu hay xảy ra vì con tàu không theo đúng ý muốn của thuyền trưởng. Khi đó chưa có sự hiểu biết nhiều về sự tương quan giữa Trái Đất, ngôi sao và các hành tinh chuyển động tương tác lẫn nhau.



Trước khi ngành vi tích phân phát triển, các ngôi sao ảnh hưởng đến sự sống còn. của ngành hàng hải.

Vi tích phân (vi phân và tích phân) được phát triển để thúc đẩy sự hiểu biết này.

Vi phân và tích phân có thể giúp chúng ta giải quyết nhiều vấn đề trong thế giới thực.

Ta dùng đạo hàm để xác định giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các hàm riêng biệt (ví dụ như giá tiền, độ dài, số lượng vật liệu dùng cho xây dựng, lợi ích, tổn thất,.).

Ta dễ bắt gặp phép tính đạo hàm trong các vấn đề liên quan đến cơ khí và tin học, đặc biệt khi ta làm mô hình đặc điểm của một vật thể đang chuyển động.

Trong phần 2.2 này:

+ Bài 2.2.1 Tiếp tuyến và pháp tuyến: Những thứ rất quan trọng tron vật lý (như lực của chiếc xe hơi đang rẽ).

+ Bài 2.2.2 Công thức Newton: Áp dụng cho những phương trình "xấu" mà bạn không thể giải đơi thuần bằng đại số.

+ Bài 2.2.3 Chuyển động cong: Bạn sẽ biết được cách tìm vận tốc và gia tốc của một vật thể đang chuyển động theo đường cong.

+ Bài 2.2.4 Tốc độ liên quan: Nơi 2 biến luôn thay đổi theo thời gian và giữa chúng có một mối quan hệ nào đó.

+ Bài 2.2.5 Sử dụng vi phân để vẽ đồ thị: Ta sẽ biết cách mô hình hóa trạng thái của biến.

+ Bài 2.2.6 Áp dụng vi phân để xử lý những vấn đề cực trị: Một trong những ứng dụng rất lớn của vi phân.

+ Bài 2.2.7 Bán kính cong: Bạn sẽ nghiên cứu trạng thái của đường cong là một phần của đường tròn trong miền lân cận nào đó.

Chúng ta bắt đầu nghiên cứu ứng dụng của vi phân với chương tiếp tuyến và pháp tuyến.

BÀI 2.2.2 TIẾP TUYẾN VÀ PHÁP TUYẾN

Tiếp tuyến và pháp tuyến có vai trò quan trọng trong ngành vật lý (như lực của chiếc xe khi rẽ ở khúc cua).

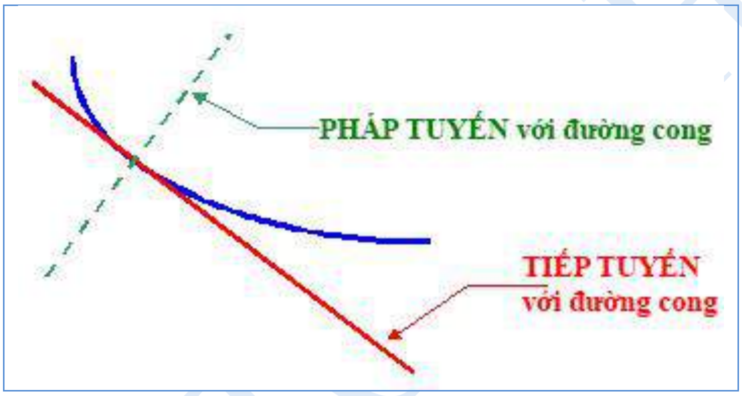
Thỉnh thoảng ta cần tìm tiếp tuyến và pháp tuyến của một đường cong khi ta phân tích 1 lực tác dụng lên 1 vật thể đang chuyển động.

I. TIẾP TUYẾN

Tiếp tuyến của một đường cong là đường thẳng tiếp xúc với đường cong tại 1 điểm nằm trên đường cong đó, tiếp tuyến có độ dốc bằng với độ dốc của đường cong tại điểm đó.

II. PHÁP TUYẾN

Pháp tuyến của đường cong là đường thẳng vuông góc với tiếp tuyến của đường cong.



Chú ý 1: Như đã nghiên cứu trong bài "*Độ dốc của tiếp tuyến với đường cong (tính toán giá trị)*", ta có thể tìm độ dốc của tiếp tuyến tại bất kỳ điểm nào $(x; y)$ thông qua $\frac{dy}{dx}$.

Chú ý 2: Để tìm phương trình tiếp tuyến, ta cần nhớ điều kiện để 2 đường thẳng có độ dốc lần lượt là $m_1; m_2$ vuông góc nhau.

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

III. ỨNG DỤNG

1. Tiếp tuyến

(i) Giả sử ta đi du lịch trên 1 chiếc xe hơi quanh khúc cua, bất chợt ta đụng vào một thứ gì đó trơn trượt trên đường (có thể là dầu, băng, nước hay cát mềm) và xe của ta bắt đầu trượt, thì chiếc xe sẽ di chuyển theo hướng tiếp tuyến với khúc cua đó.

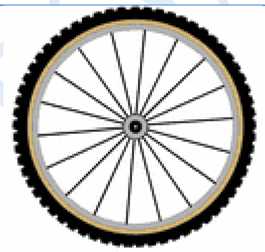
Một chiếc xe trượt sau khi rẽ khúc cua.
tạo ra vệt tiếp tuyến với vạch kẻ đường đôi màu vàng

(ii) Tương tự, nếu ta cầm trái banh và ném chúng quanh 1 vật thể đang xoay tròn, trái banh ngay lập tức bay ra theo phương tiếp tuyến vật thể xoay tròn đó.

2. Pháp tuyến

(i) Khi bạn lái xe nhanh theo đường tròn, lực khiến bạn cảm thấy như xe mình sắp rời khỏi đường tròn đó chính là pháp tuyến của đường cong con đường. Một điều khá thú vị là lực giúp bạn di chuyển vòng quanh khúc cua hướng thẳng về tâm đường tròn, pháp tuyến với đường tròn.

(ii) Căm bánh xe được đặt pháp tuyến với đường cong bánh xe ở những điểm có chỗ cho căm xe liên kết với tâm bánh xe.



Căm xe đạp được đặt
pháp tuyến với vành bánh xe

IV. VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm độ dốc của:

a) Tiếp tuyến.

b) Pháp tuyến.

của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + 5$ tại điểm $(2; 5)$.

Trả lời ví dụ 1

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$$

Độ dốc tiếp tuyến là:

$$m_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4$$

Vậy độ dốc của pháp tuyến tính theo công thức $m_1 \cdot m_2 = -1$.

$$m_2 = -\frac{1}{4}$$

Ví dụ 2: Viết phương trình pháp tuyến ở Ví dụ 1 bên trên.

Trả lời ví dụ 2

Ta dùng $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Với:

$$x_1 = 2$$
$$y_1 = 5$$
$$m = -\frac{1}{4}$$

Vậy:

$$y - 5 = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

Cho ta:

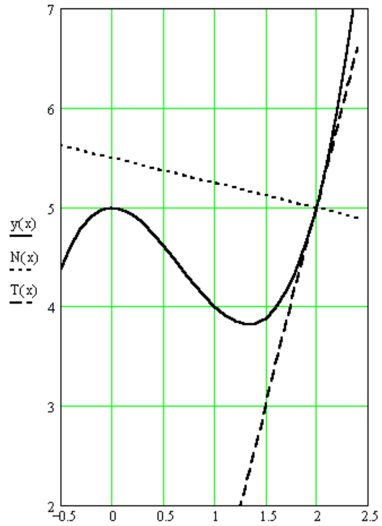
$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{2}$$

Hay:

$$x + 4y - 22 = 0$$

Ví dụ 3: Vẽ đồ thị và pháp tuyến ở Ví dụ 1 trên.

Trả lời ví dụ 3



Đây là đồ thị của tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong tại $x = 2$

BÀI 2.2.3 CÔNG THỨC NEWTON

Với những phương trình phức tạp mà bạn không thể giải thuần túy đại số thì bài viết này rất hữu ích cho bạn.

Các máy tính sử dụng công thức vòng lặp để giải phương trình. Quá trình này bao gồm phán đoán ra cách giải đúng và áp dụng công thức để đưa ra các phán đoán chính xác hơn cho đến khi ta tìm ra được giá trị (có thể xấp xỉ) đúng nhất của phương trình.

Nếu ta muốn tìm x để $f(x) = 0$ (dạng bài toán phổ biến) thì ta đoán một vài giá trị x_1 gần đúng nhất, từ đó ta sẽ tìm ra giá trị xấp xỉ phù hợp bằng cách sử dụng công thức Newton:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

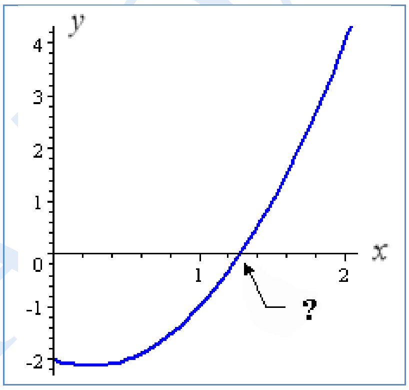
(Công thức này dựa vào phương trình đường thẳng theo độ dốc).

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$2x^2 - x - 2 = 0.$$

Trả lời ví dụ 1

Ta có đồ thị phương trình trên:



Đặt:

$$f(x) = 2x^2 - x - 2$$
$$\Rightarrow f'(x) = 4x - 1$$

Thử $x_1 = 1.5$.

Ta được:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = 1.3$$

Vậy 1.3 là giá trị xấp xỉ đúng hơn.

Tiếp tục quy trình này:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.3 - \frac{f(1.3)}{f'(1.3)} = \frac{269}{210} \approx 1.280\,952\,381$$

Ta có thể làm tiếp quy trình này nhiều lần để tìm ra giá trị chính xác nhất.

Kiểm tra: Sử dụng một vài phần mềm toán học (như Mathcad), ta có thể phải nhập vào giá trị dự đoán ban đầu (như $x = 2$) và kết quả là:

$$\mathrm{root}(2x^2 - x - 2, x) = 1.280\,776\,406\,404$$

Ngoài ra ta có thể sử dụng phím SHIFT + SOLVE trên máy tính Casio fx-570ES nhập vào giá trị dự đoán ban đầu thì máy tính cũng đưa ra kết quả này.

I. HÀM SỐ CÓ NHIỀU NGHIỆM

Nhiều hàm số có nhiều nghiệm, nên bạn cần phải hiểu rõ vấn đề sau đó cho máy tính một giá trị dự đoán ban đầu tốt nhất.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$1 - t^2 + 2^t = 0$$

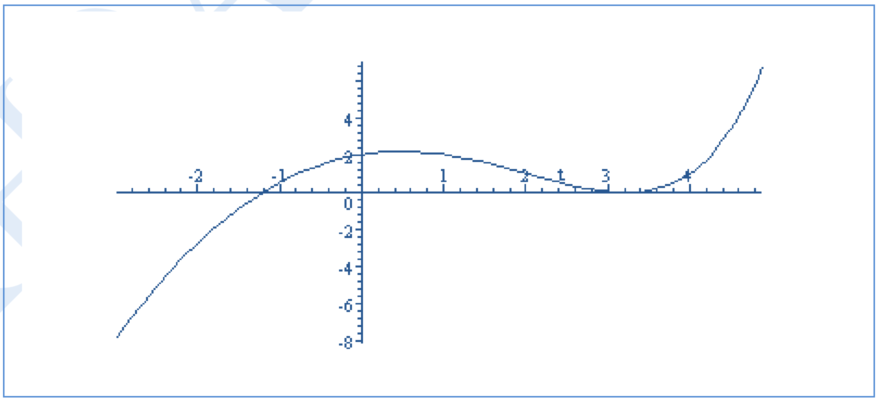
(Các phần mềm khoa học không thể tìm cách giải chính xác cho chúng ta. Ta cần biết sử dụng công cụ hợp lý để giải, không hẳn phải dùng đồ thị hay công thức Newton. Điều này sẽ cho ta có đánh giá ban đầu về nghiệm phương trình).

Trả lời ví dụ 2

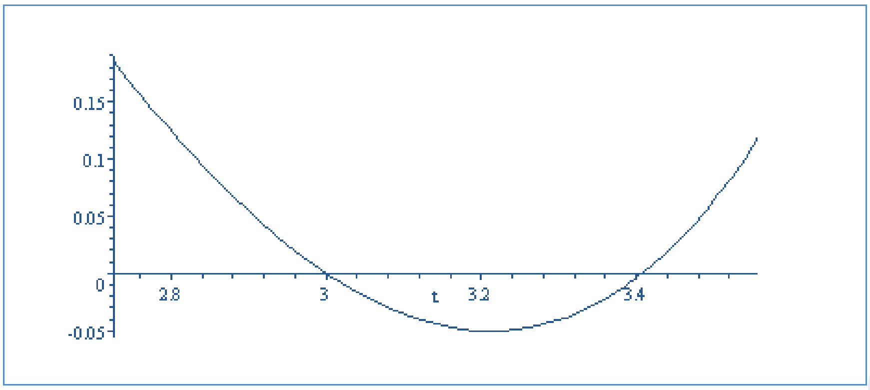
Đặt:

$$y = 1 - t^2 + 2^t$$

Đồ thị hàm số $y(t)$:



Ta dễ có nhận định ban đầu rằng phương trình có hai nghiệm, một nghiệm gần $t = -1$ và nghiệm còn lại gần $t = 3$. Tuy nhiên, nếu ta quan sát kỹ hơn khu vực gần $t = 3$ (bằng cách phóng to) thì ta phát hiện ra còn một nghiệm nữa.



Bằng cách thay số thì ta được một nghiệm chính xác là $t = 3$.

Bây giờ với một nghiệm gần $t = 3.4$.

Ta sẽ dùng công thức Newton để tìm ra giá trị xấp xỉ của nghiệm. Ta cần tính vi phân

$y = 1 - t^2 + 2^t$. Bởi vì ta có t đóng vai trò lũy thừa trong phương trình trên, ta cần sử dụng Logarithm khi tính vi phân (các bạn có thể tham khảo cách tính vi phân hàm logarithm trên Internet, tôi sẽ trình bày rõ hơn trong chương "*Vi phân hàm số siêu việt*").

Tính vi phân 2^t.

Đặt $h = 2^t$.

Lấy logarithm tự nhiên ở hai vế:

$$\ln(h) = t\ln(2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h}\frac{dh}{dt} = \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dh}{dt} = h\ln(2) = 2^t\ln(2)$$

Vậy:

$$\frac{dy}{dt} = f'(t) = -2t + 2^t\ln(2)$$

Áp dụng công thức Newton, ta được:

$$\frac{f(t)}{f'(t)} = \frac{1 - t^2 + 2^t}{-2t + 2^t\ln(2)}$$

Ta có con số dự đoán ban đầu là $t_1 = 3.4$.

$$t_2 = t_1 - \frac{f(t_1)}{f'(t_1)} \approx 3.407\,615\,918$$

Tiếp tục quy trình này:

$$t_3 = t_2 - \frac{f(t_2)}{f'(t_2)} \approx 3.407\,450\,596$$

Thêm vài bước nữa, ta được:

$$t_4 = 3.407\,450\,522$$
$$t_5 = 3.407\,450\,505$$

Ta có thể kết luận nghiệm phương trình đúng với 7 chữ số lẻ là $t = 3.407\,450$.

II. SỬ DỤNG ĐỒ THỊ

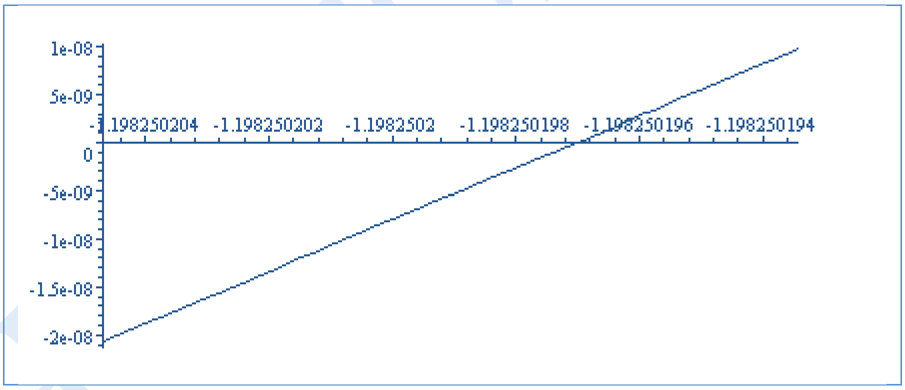
Sử dụng các phần mềm toán học, ta có thể phóng to nghiệm và ta có thể thấy (nơi hàm số cắt trục x) thì t gần với giá trị 3.407 45.

Bây giờ ta xét trường hợp âm, giả sử $t_1 = -1$ là giá trị dự đoán ban đầu, áp dụng công thức Newton, ta được:

$$t_2 = -1.213\,076\,633$$
$$t_3 = -1.198\,322\,474$$
$$t_4 = -1.198\,250\,199$$

Ta có thể tiếp tục quy trình này cho đến khi ta đạt giá trị chính xác nhất.

Đối chiếu đáp số với đồ thị, ta thấy rằng kết quả là $t = -1.198\,250\,197$ chính xác đến 9 chữ số lẻ.



III. KẾT LUẬN

Vậy kết quả của phương trình $1 - t^2 + 2^t = 0$ là:

$$t = -1.198\,25$$
$$t = 3$$
$$t = 3.407\,45$$

Chính xác đến 5 chữ số lẻ.

BÀI 2.2.4 CHUYỂN ĐỘNG CONG

Bài viết này sẽ cho các bạn thấy cách tìm vận tốc và gia tốc của một vật thể chuyển động cong.

Ở bài Đạo hàm với tốc độ thay đổi tức thời, ta đã tìm ra cách xác định vận tốc theo phương trình chuyển động bằng cách.

$$v = \frac{ds}{dt}$$

và gia tốc theo phương trình vận tốc (hay phương trình chuyển động), sử dụng:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Công thức trên chỉ thích hợp với chuyển động thẳng (như vận tốc và gia tốc trên đường thẳng), điều này chưa phù hợp với nhiều vấn đề trong cuộc sống. Vì vậy ta nghiên cứu đến khái niệm về chuyển động cong khi một vật thể di chuyển theo đường cong định trước.

Thông thường ta biểu diễn thành phần chuyển động là x và y là hàm số theo thời gian, gọi là dạng tham số.

Ví dụ 1: Cho phương trình chuyển động theo tham số t, hãy vẽ đồ thị:

$$y(t) = \cos(t)$$
$$x(t) = \sin(t)$$

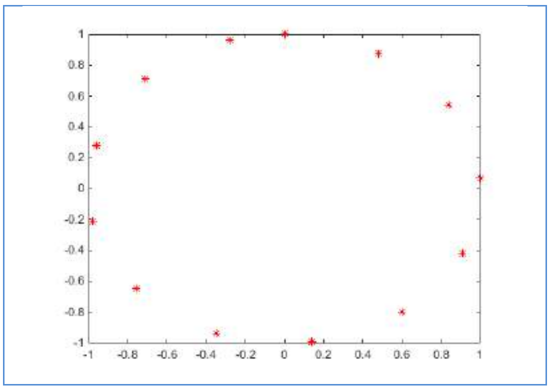
với $t = 0$ đến 2π trong 0.5 quãng đường đầu.

Đầu tiên, ta cần thiết lập bảng giá trị bằng cách thay một số giá trị vào t.

Trả lời ví dụ 1

Ta xác định 13 điểm theo bảng giá trị, bắt đầu tại $(0; 1)$ như theo hình dưới đây (di chuyển theo chiều kim đồng hồ).

t	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
$x(t)$	0	0.48	0.84	1.00	0.91	0.60	0.14	−0.35	−0.76	−0.98	−0.96	−0.71	−0.28
$y(t)$	1	0.88	0.54	0.07	−0.42	−0.80	−0.99	−0.94	−0.65	−0.21	0.28	0.71	0.96



Ta thấy rằng ta đã tạo ra một hình tròn tâm tại $(0; 0)$ và bán kính 1 đơn vị.

Cần lưu ý rằng ẩn t không xuất hiện trong đồ thị này mà chỉ có ẩn x và y.

I. CÁC THÀNH PHẦN NGANG VÀ DỌC CỦA VẬN TỐC

Thành phần ngang của vận tốc được xác định bởi:

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

và thành phần dọc của vận tốc:

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

Ta có thể tìm độ lớn của vận tốc tổng hợp v một khi ta đã biết các thành phần ngang và dọc của vận tốc bằng cách sử dụng:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Phương vị θ mà vật thể di chuyển được xác định bởi:

$$\tan(\theta_v) = \frac{v_y}{v_x}$$

Ví dụ 2: Cho phương trình $x = 5t^3$ và $y = 4t^2$ với thời gian t, tìm độ lớn và phương vị của vận tốc khi $t = 10$.

Trả lời ví dụ 2

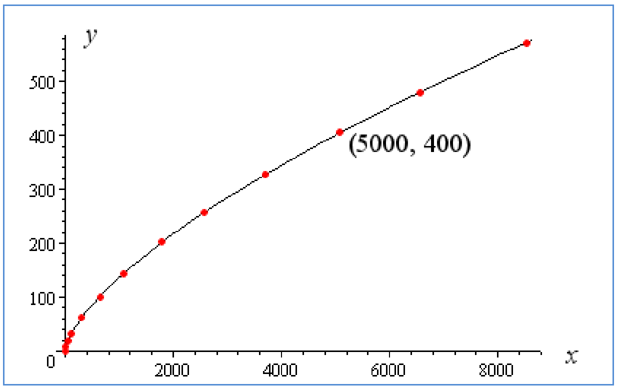
Khi $t = 10$, ta được tọa độ điểm là $(5\,000; 400)$.

Đây là đồ thị của chuyển động.

Lưu ý:

Trục tọa độ là x và y (không có kèm theo t).

Các điểm "chuyển động" nhanh dần theo thời gian.



Ta có:

$$x = 5t^3$$

Vì vậy:

$$\frac{dx}{dt} = 15t^2$$

Với $t = 10$, vận tốc theo chiều trục x là:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = 1\,500\, m/s$$

Tương tự, $y = 4t^2$ nên vận tốc theo chiều trục y khi $t = 10$ là:

$$\frac{dy}{dt} = v_y = 80\, m/s$$

Vậy độ lớn của vận tốc sẽ là:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 1\,520.1\, m/s$$

Bây giờ ta xác định phương vị của vận tốc (tính theo góc hợp với trục x dương).

$$\tan(\theta_v) = \frac{v_y}{v_x} = 0.053$$

Vậy $\theta_v = 0.053$ rad $= 3.05°$.

Ví dụ 3: Cho:

$$x = \frac{20t}{2t+1}$$

Và,

$$y = 0.1(t^2 + t)$$

theo thời gian t. Xác định độ lớn và phương vị của vận tốc khi $t = 2$. Vẽ đồ thị đường cong.

Trả lời ví dụ 3

Khi $t = 2$ ta được tọa độ điểm là $(8; 0.6)$.

$$x = \frac{20t}{2t+1}$$

Vậy,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20}{(2t+1)^2}$$

Với $t = 2$:

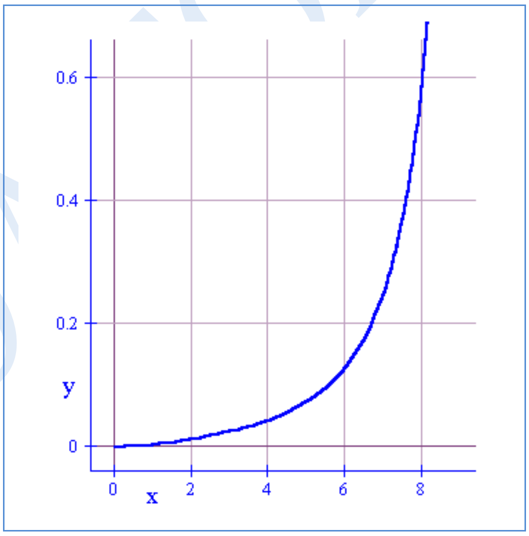
$$\frac{dx}{dt} = v_x = 0.8\, m/s$$

Tương tự, với $y = 0.1(t^2 + t)$ và $t = 2$, ta được:

$$\frac{dy}{dt} = v_y = 0.1(2t+1) = 0.5\, m/s$$

Vậy:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 0.943\, m/s$$



Bây giờ ta xác định phương vị:

$$\tan(\theta_v) = \frac{v_y}{v_x} = 0.625$$

Vậy:

$$\theta_v = \arctan(0.625) = 0.558 \text{ rad}$$

II. GIA TỐC VẬT THỂ KHI CHUYỂN ĐỘNG CONG

Biểu thức của gia tốc có cách xác định tương tự như cách xác định vận tốc.

Thành phần ngang của gia tốc:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

Thành phần dọc của gia tốc:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

Độ lớn của gia tốc:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Phương vị của gia tốc:

$$\tan(\theta_a) = \frac{a_y}{a_x}$$

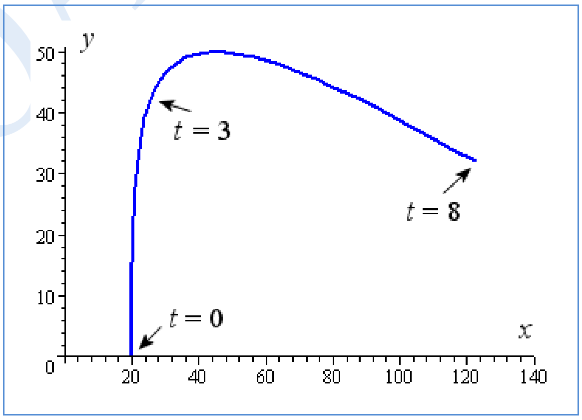
Ví dụ 4: Một chiếc xe hơi trên đường chạy thử nghiệm đến khúc cua thì chạy với biểu thức đường đi là $x = 20 + 0.2t^3$; $y = 20t - 2t^2$ với x và y tính theo metre (m) và t là giây (s).

a) Vẽ đồ thị đường cong với $0 \leq t \leq 8$.

b) Tính gia tốc của xe khi $t = 0.3s$.

Trả lời ví dụ 4 câu a)

Đồ thị:



Trả lời ví dụ 4 câu b)

Gia tốc:

Thành phần ngang:

$$x = 20 + 0.2t^3$$
$$v_x = \frac{dx}{dt} = 0.6t^2$$
$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 1.2t$$

Với $t = 3.0;\ a_x = 3.6.$

Thành phần dọc:

$$y = 20t - 2t^2$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = 20 - 4t$$
$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -4$$

Với $t = 3; a_y = -4.$

Bây giờ:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 5.38$$

Và:

$$\theta_a = \arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = 312°, \qquad \text{(góc phần tư thứ 4)}$$

Vậy gia tốc của xe có độ lớn là $5.38\,m/s^2$ và có phương vị $312°$ hợp với trục x theo chiều dương.

III. VẬY NẾU NHƯ X VÀ Y KHÔNG PHẢI LÀ PHƯƠNG TRÌNH THEO THAM SỐ T THÌ GIẢI QUYẾT NHƯ THẾ NÀO?

Ví dụ 5: Một hạt di chuyển theo đường $y = x^2 + 4x + 2$ tính theo cm. Cho vận tốc ngang $v_x = 3\,cm/s$, xác định độ lớn và phương vị của vận tốc tại điểm $(-1; -1)$.

Trả lời ví dụ 5

Đây là cách giải quyết khác cho ví dụ. Lần này ta có y theo x và không có biểu thức nào chứa tham số t nữa.

Để có thể xác định độ lớn cũng như phương vị của vận tốc, ta cần biết:

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

Và,

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

Nhưng trong câu hỏi đã cho ta:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3$$

Vậy ta cần tìm $\frac{dy}{dt}$.

Để tìm được, ta tính vi phân phương trình đã cho theo t bằng cách sử dụng các kỹ thuật ta đã nghiên cứu trong bài vi phân hàm ẩn:

$$y = x^2 + 4x + 2$$
$$\frac{dy}{dx} = 2x\frac{dx}{dt} + 4\frac{dx}{dt}$$

Vì $\frac{dx}{dt} = 3$ và ta muốn biết vận tốc tại $x = -1$ nên ta được:

$$\frac{dy}{dx} = v_y = 6\, cm/s$$

Vậy độ lớn vận tốc là:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 6.708\,2\, cm/s$$

Vậy vận tốc là $6.708\,2\, cm/s$ với phương vị $63.4°$.

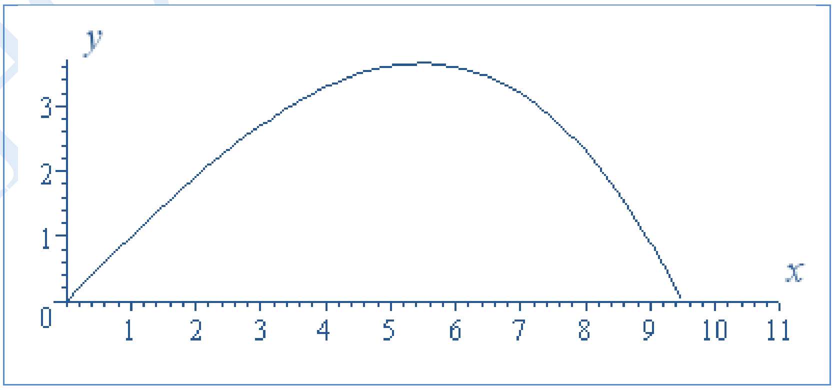
Ví dụ 6:

Một quả tên lửa được bắn theo quỹ đạo (tính theo km): $y = x - \frac{x^3}{90}$.

Nếu vận tốc ngang được cho bởi $V(x) = x$, xác định độ lớn và phương vị của vận tốc khi quả tên lửa chạm đất (coi như địa hình bằng phẳng) với thời gian tính theo phút.

Trả lời ví dụ 6

Hãy nhìn vào đồ thị chuyển động để hiểu rõ hơn vấn đề đặt ra:



Ta thấy rằng quả tên lửa chạm đất ở gần vị trí $x = 9.5km$. Tại điểm này vận tốc ngang có giá trị dương (quả tên lửa đi từ trái sang phải) và vận tốc dọc có giá trị âm (quả tên lửa đi xuống).

"$V(x) = x$" có nghĩa là khi x tăng, vận tốc ngang cũng tăng với cùng một giá trị (đương nhiên là khác đơn vị đo). Vậy với ví dụ này, với $x = 2km$ thì tốc độ ngang là $2\ km/$phút, và với $x = 7km$, tốc độ ngang là $7\ km/$phút và cứ thế.

Để tính độ lớn vận tốc khi tên lửa chạm đất, ta cần xác định các thành phần ngang và dọc của vận tốc ở thời điểm đó.

(i) Vận tốc ngang: Ta cần giải phương trình sau để tìm chính xác điểm va chạm của tên lửa với mặt đất:

$$x - \frac{x^3}{90} = 0$$

Rút nhân tử, ta được:

$$x\left(1 - \frac{x^2}{90}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = -3\sqrt{10} \\ x = 0 \\ x = 3\sqrt{10} \end{array}\right.$$

Ta chỉ cần giá trị $x = 3\sqrt{10} \approx 9.4868km$ (giá trị này phù hợp với đồ thị trên).

Vậy tốc độ ngang khi tên lửa chạm mặt đất là $9.4868\ km/$phút (vì $V(x) = x$).

(ii) Vận tốc dọc: Bây giờ ta cần dùng vi phân hàm ẩn theo t (chứ không phải theo x) để tìm vận tốc dọc:

$$y = x - \frac{x^3}{90}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{1}{30}x^2\frac{dx}{dt}$$

Nhưng ta đã biết $\frac{dx}{dt}$ và x có ảnh hưởng với nhau, vậy ta chỉ cần thay giá trị x tìm được ở phần (i), kết quả sẽ ra số âm đúng như ta dự đoán ban đầu:

$$\frac{dy}{dt} \approx -18.973\,665\,96$$

Bây giờ ta tính độ lớn vận tốc, bao gồm vận tốc ngang và vận tốc dọc:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \approx 21.213\,203\,44$$

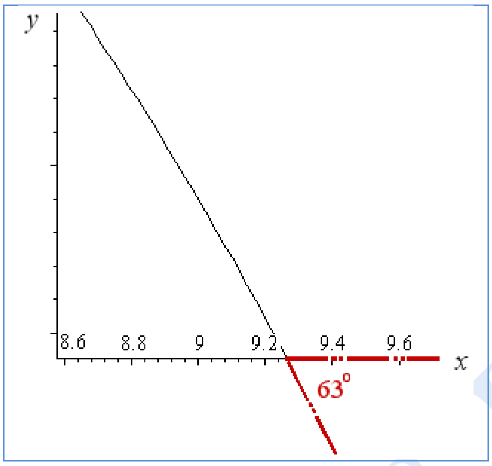
Vận tốc có độ lớn và phương vị. Bây giờ ta tính phương vị (tức góc của chuyển động).

$$\theta = \arctan\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) \approx -1.107\,148\,718$$

Tính theo độ thì điều này tương đương:

$$= -1.107\,148\,718 \cdot 57.255\,78 = -63.3907°$$

Ta có thể thấy đáp án trên hợp lý bằng cách phóng to một phần của đồ thị nơi tên lửa chạm đất.



Vậy ta kết luận vận tốc tên lửa khi chạm đất là 21.2 $km/$phút, phương vị 6.4° hợp với phương nằm ngang.

BÀI 2.2.5 TỐC ĐỘ LIÊN QUAN

Nếu ta có 2 đại lượng phụ thuộc theo thời gian và giữa chúng có sự liên quan với nhau, ta có thể biểu thị tốc độ thay đổi của đại lượng này theo đại lượng khác. Khi đó ta cần vi phân cả hai bên theo thời gian, tức là ta sẽ tìm $\frac{df}{dt}$ của hàm $f(t)$ nào đó.

Ví dụ 1: Môt cây thang cao $20m$ dựa vào tường, đỉnh thang trượt xuống với tốc độ $4\,m/s$. Hỏi tốc độ di chuyển của điểm giữa thang lúc cách mặt đất $16m$ là bao nhiêu?

Các bước thực hiện ví dụ 1

(i) Vẽ hình minh họa cho bài toán.

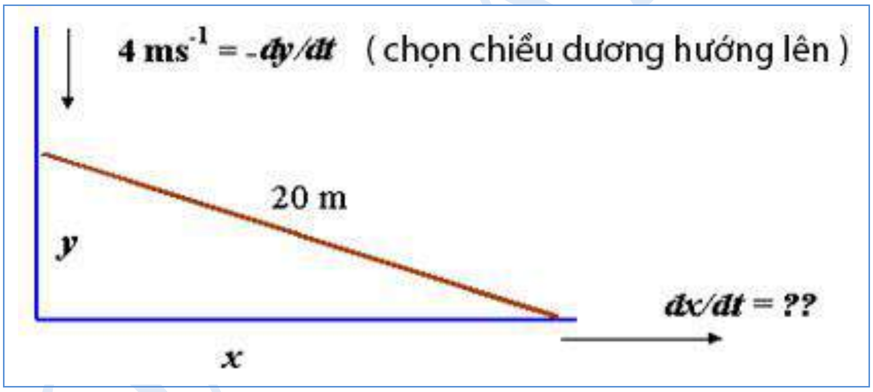
(ii) Xác định hằng số và số lượng các biến.

(iii) Thiết lập mối quan hệ giữa các đại lượng này.

(iv) Vi phân theo thời gian.

(v) Xác định giá trị điểm giữa thang.

Trả lời ví dụ 1



Bây giờ mối quan hệ giữa x và y là $x^2 + y^2 = 20^2$.

Vi phân hoàn toàn theo thời gian (vì x và y đều phụ thuộc theo thời gian t):

$$\frac{d}{dt}x^2 + \frac{d}{dt}y^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

Tức là:

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$$

Bây giờ, ta đã biết $\frac{dy}{dt} = -4$ và ta cần tìm vận tốc ngang $\frac{dx}{dt}$ khi $x = 16$.

Một đại lượng chưa xác định giá trị là y, sử dụng định lý Pythagoras:

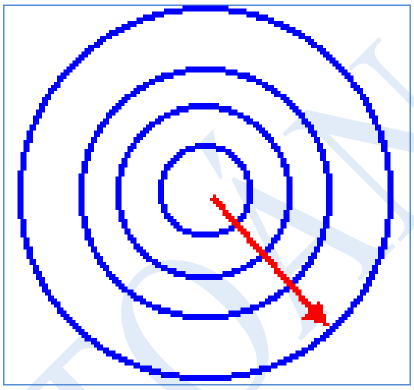
$$y = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$$

Vậy:

$$16\frac{dx}{dt} + 12 \cdot (-4) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = 3\, m/s$$

Ví dụ 2: Một hòn đá rơi vào một cái ao tạo thành những gợn sóng hình tròn đồng tâm loang rộng ra xung quanh. Hỏi tốc độ diện tích một trong các hình tròn này gia tăng là bao nhiêu vào thời điểm bán kính hình tròn đó tăng thành $4m$ và loang rộng với vận tốc $4\, m/s$?

Trả lời ví dụ 2



Mối quan hệ: $A = \pi r^2$.

Vi phân theo thời gian, sau đó thay vào các giá trị có sẵn:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = 2\pi r \frac{dr}{dt} = 2\pi \cdot 4 \cdot 0.5 \approx 12.56\, m^2/s$$

Ví dụ 3: Một vệ tinh di chuyển theo quỹ đạo có phương trình:

$$\frac{x^2}{72.5} + \frac{y^2}{71.5} = 1$$

với x và y tính theo đơn vị "nghìn km".

Nếu $\frac{dx}{dt} = 12{,}900\, km/h$ khi $x = 3{,}200km$ và $y > 0$, xác định giá trị $\frac{dy}{dt}$.

Trả lời ví dụ 3

Ta vi phân biểu thức theo t:

$$\frac{x^2}{72.5} + \frac{y^2}{71.5} = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{2x\dfrac{dx}{dt}}{72.5} + \frac{2y\dfrac{dy}{dt}}{71.5} = 0$$

Ta tìm y bằng cách thay $x = 3.2$ vào phương trình giả thiết cho lúc đầu:

$$\frac{3.2^2}{72.5} + \frac{y^2}{71.5} = 1$$

$$\Longrightarrow y \approx 7.836$$

Dựa vào câu hỏi nên ta lấy giá trị dương, thay vào phương trình vi phân, ta được:

$$\frac{2 \cdot 3.2 \cdot 12.9}{72.5} + \frac{2 \cdot 7.836\dfrac{dy}{dt}}{71.5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} \approx -5.195$$

Điều này có nghĩa vận tốc theo chiều trục y là $-5.195\, km/h$.

Ví dụ 4: Một máy điều hưởng điện từ có tần số f thay đổi tỉ lệ nghịch với căn bậc hai của tụ điện C trong mạch. Nếu $f = 920kHz$ khi $C = 3.5pF$, hỏi tốc độ tần số f thay đổi nhanh thế nào nếu như $\frac{dC}{dt} = 0.3\, pF/s$?

Trả lời ví dụ 4

Ta có:

$$f = \frac{k}{\sqrt{C}}$$

Thay thế các giá trị đã có, ta được:

$$920\,000 = \frac{k}{3.5 \cdot 10^{-12}}$$

$$\Leftrightarrow k = 1.721$$

Vậy $f = 1.721\sqrt{C}$.

Ta cần tìm $\frac{df}{dt}$:

$$\frac{df}{dt} = -\frac{1.721}{2} C^{-\frac{3}{2}} \frac{dC}{dt}$$

Mà $C = 3.5pF$ và $\frac{dC}{dt} = 0.3\, pF/s$.

Vậy:

$$\frac{df}{dt} = -\frac{1.721}{2} \cdot (3.5 \cdot 10^{-12})^{-\frac{3}{2}} \cdot (0.3 \cdot 10^{-12}) = -39\,424.8\, Hz/s$$

Vậy tần số của máy điều hưởng điện từ giảm với tốc độ 39.4 kHz/s.

BÀI 2.2.6 SỬ DỤNG VI PHÂN ĐỂ VẼ ĐỒ THỊ

Lưu ý:

Hiện có rất nhiều phần mềm vẽ đồ thị (Mathcad, Scientific Notebook, graphic calculator,.). Trong bài viết này điều cần lưu ý là bạn phải nắm bắt được hình dạng cơ bản của đường cong bạn gặp. Việc hiểu được nét tự nhiên của nhưng hàm số rất quan trọng cho việc nghiên cứu của bạn sau này. Đa số các mô hình toán học đều bắt đầu từ đồ thị.

Bạn cần phải vẽ đồ thị, đưa ra những vị trí đặc biệt, tránh việc vẽ hộp $x - y$ và chấm các điểm.

Ta sẽ dùng vi tích phân để tìm ra các điểm đặc biệt.

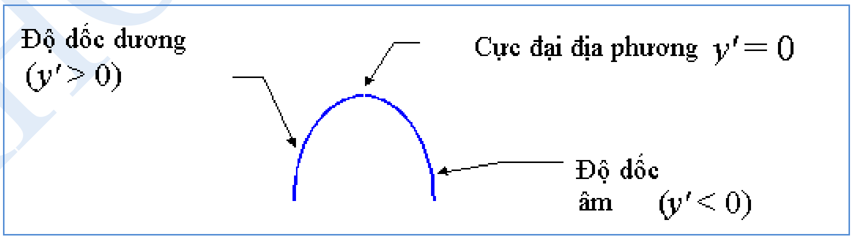
Những điều ta sẽ tìm trong bài viết này là:

Giao điểm trục x	Sử dụng $y = 0$. Lưu ý: Trong nhiều trường hợp, tìm giao điểm trục x không dễ, khi đó hãy bỏ qua bước này.
Giao điểm trục y	Sử dụng $x = 0$.
Cực đại địa phương	Sử dụng $\frac{dy}{dx}$. Dấu của đạo hàm đầu tiên thay đổi $+$ sang $-$.
Cực tiểu địa phương	Sử dụng $\frac{dy}{dx}$. Dấu của đạo hàm đầu tiên thay đổi $-$ sang $+$.
Điểm uốn	Sử dụng $\frac{d^2y}{dx^2}$, và dấu của $\frac{d^2y}{dx^2}$ thay đổi.

I. TÌM CỰC ĐẠI VÀ CỰC TIỂU

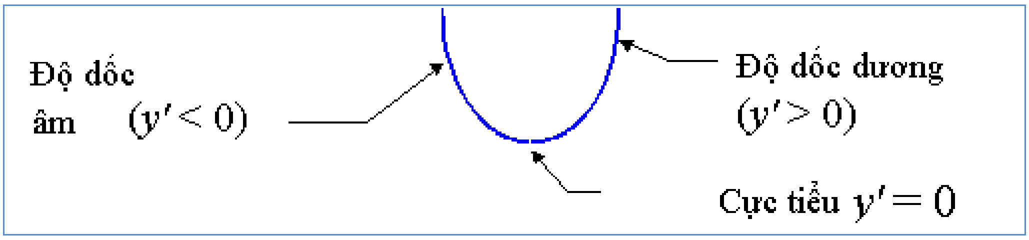
1. Cực đại địa phương

Cực đại địa phương xuất hiện khi phương trình $y' = 0$ có nghiệm và dấu của y' thay đổi từ dương sang âm khi đi từ trái sang phải:



2. Cực tiểu địa phương

Cực tiểu địa phương xuất hiện khi phương trình $y' = 0$ có nghiệm và dấu của y' thay đổi từ âm sang dương khi đi từ trái sang phải.

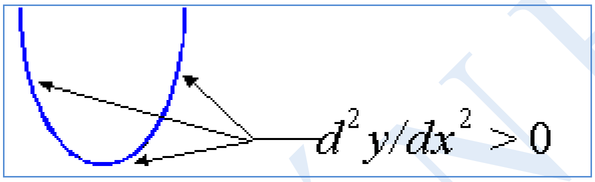


II. ĐẠO HÀM BẬC 2

Đạo hàm bậc 2 cho ta biết hình dạng của đường cong ở bất kỳ điểm nào.

1. Lõm xuống

Nếu $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ thì đường cong sẽ có hình kiểu cực tiểu gọi là lõm xuống (hay "lõm").



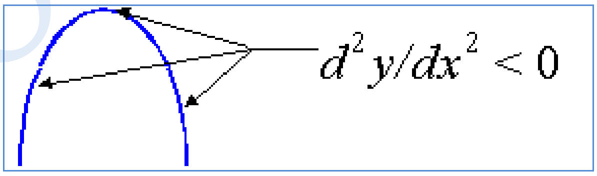
Ví dụ 1:

Đường cong $y = x^2 + 3x - 2$ có $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$.

Bây giờ $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$ và đương nhiên giá trị này > 0 với mọi x nên có hình lõm xuống với mọi giá trị x.

2. Lõm lên

Nếu $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ thì đường cong sẽ có hình kiểu cực đại gọi là lõm lên (hay "lồi").



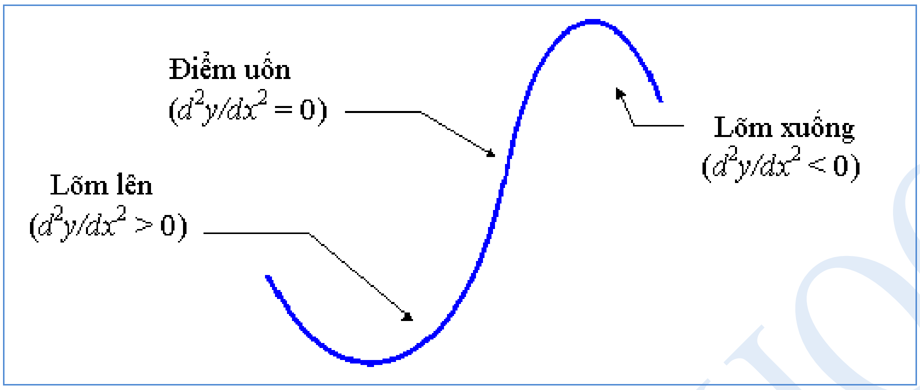
Ví dụ 2:

Đường cong $y = x^3 - 2x + 5$ có $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2$. Đạo hàm bậc hai là $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x < 0,\ \forall x < 0$. Vì vậy đường cong lõm xuống với mọi giá trị $x < 0$ (và lõm lên với mọi giá trị $x > 0$).

III. TÌM ĐIỂM UỐN

Điểm uốn là điểm mà hình dạng của đường cong thay đổi từ hình kiểu cực đại $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ sang hình kiểu cực tiểu $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$.

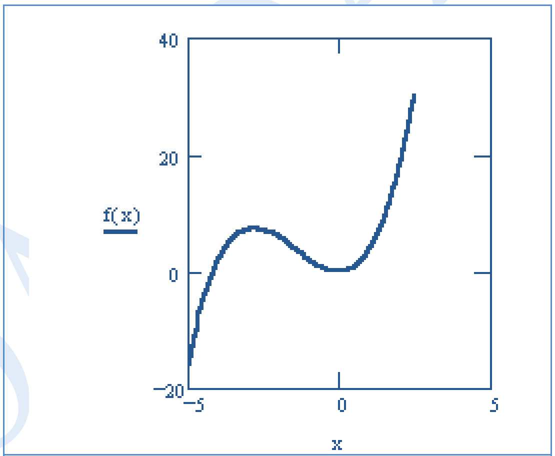
Rõ ràng, điểm uốn sẽ xuất hiện khi $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ và có sự đổi dấu (từ $+$ sang $-$ hoặc từ $-$ sang $+$).



Ví dụ 3: Vẽ đồ thị sau bằng cách tìm giao điểm hai trục tọa độ, điểm uốn, (các) điểm cực đại, cực tiểu: $y = x^3 - 9x$.

Trả lời ví dụ 3

Hình dạng cơ bản của phương trình bậc 3 là:



Hãy nhớ hình này. Sẽ giúp ích cho bạn trong quá trình vẽ hình đấy.

(i) Giao điểm với trục x:

$$y = x^3 - 9x = x(x+3)(x-3)$$

Nên,

$$y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

(ii) Giao điểm với trục y:

Khi $x = 0$ thì $y = 0$.

(iii) Các điểm cực đại và cực tiểu:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 9 = 3(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

Nên,

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy ta có các điểm cực đại, cực tiểu với các giá trị xấp xỉ $(-1.7; 10.4)$ và $(1.7; -10.4)$.

Ta có thể kiểm tra điều này bằng cách kiểm tra một vài điểm gần -1.7 và 1.7 để kiểm chứng xem dấu thay đổi như thế nào. Nhưng ta cần phải tìm đạo hàm cấp 2 để xác định điểm uốn, vì vậy ta sẽ tận dụng điều này để kiểm chứng cực đại, cực tiểu.

(iv) Đạo hàm bậc 2:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

Vì $x = -1.7$ thì $y'' < 0$ nên $(-1.7; 10.4)$ là cực đại địa phương.

Vì $x = 1.7$ thì $y'' > 0$ nên $(1.7; -10.4)$ là cực tiểu địa phương.

(v) Điểm uốn:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

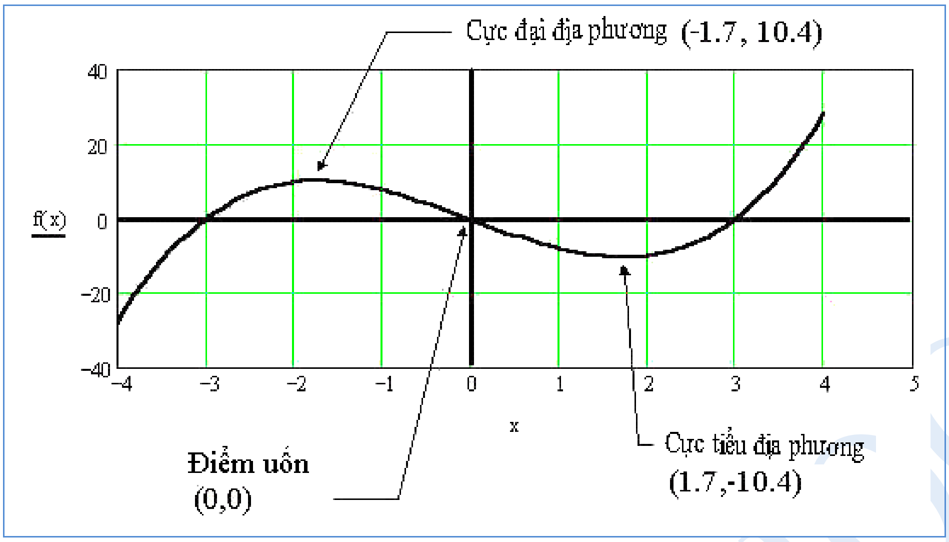
Nên,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Và $\frac{d^2y}{dx^2}$ đổi dấu từ âm (lõm xuống) sang dương (lõm lên) khi x đi qua 0.

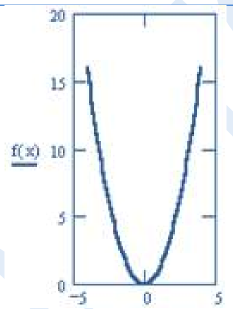
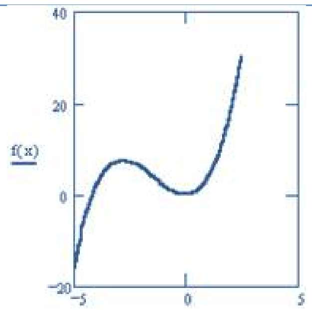
(vi) Đồ thị:

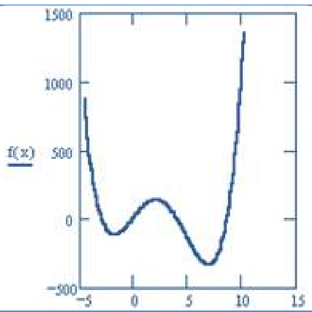
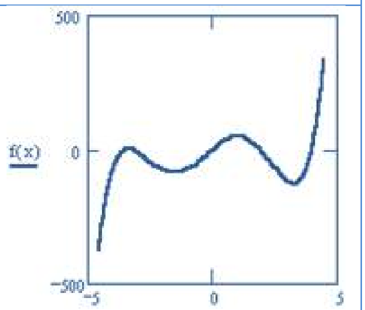
Bây giờ ta đã đủ dữ liệu để vẽ đồ thị:



IV. CÁC DẠNG HÌNH TỔNG QUÁT

Nếu ta biết được những hình dạng cơ bản này thì việc vẽ đồ thị sẽ dễ dàng hơn rất nhiều. Đương nhiên những hình dưới đây là hình "lý tưởng", và còn rất nhiều dạng hình khác và trường hợp khác. Nhưng ít ra những hình này chính là nền tảng để các bạn nghiên cứu những hình phức tạp hơn.

Hàm bậc 2	**Hàm bậc 3**
Mũ cao nhất của x: 2	Mũ cao nhất của x: 3
	
1 cực tiểu. 0 cực đại. (nếu hàm số có hệ số trước x^2 là dương)	1 cực tiểu. 1 cực đại.
0 điểm uốn.	1 điểm uốn.

Hàm bậc 4	**Hàm bậc 5**
Mũ cao nhất của x: 4	Mũ cao nhất của x: 5
	

2 cực tiểu. 0 cực đại. (nếu hàm số có hệ số trước x^2 là dương)	2 cực tiểu. 2 cực đại.
2 điểm uốn.	3 điểm uốn.

Ví dụ 4:

Vẽ đồ thị và thể hiện giao điểm với các trục đồ thị, cực đại, cực tiểu và điểm uốn:

$$y = x^4 - 6x^2$$

Trả lời ví dụ 4

(i) Giao điểm với trục x:

$$y = x^4 - 6x^2 = x^2\left(x + \sqrt{6}\right)\left(x - \sqrt{6}\right)$$

Nên,

$$y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{6} \\ x = \sqrt{6} \end{array}\right.$$

(ii) Giao điểm với trục y:

Khi $x = 0$ thì $y = 0$.

(iii) Các điểm cực đại và cực tiểu:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 12x = 4x\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$$

Nên,

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy ta có các điểm cực đại, cực tiểu là $(0; 0)$ và $\left(-\sqrt{3}; -9\right)$ và $\left(\sqrt{3}; -9\right)$.

(iv) Đạo hàm bậc 2:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 12$$

Vì $x = -\sqrt{3}$ thì $y'' > 0$ nên $\left(-\sqrt{3}; 9\right)$ là cực tiểu địa phương.

Vì $x = \sqrt{3}$ thì $y'' > 0$ nên $\left(\sqrt{3}; 9\right)$ là cực tiểu địa phương.

Vì $x = 0$ thì $y'' < 0$ nên $(0; 0)$ là cực đại địa phương.

(v) Điểm uốn:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 12 = 12(x+1)(x-1)$$

Nên,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Nếu $x < -1$ thì $y'' > 0$.

Nếu $-1 < x < 1$ thì $y'' < 0$.

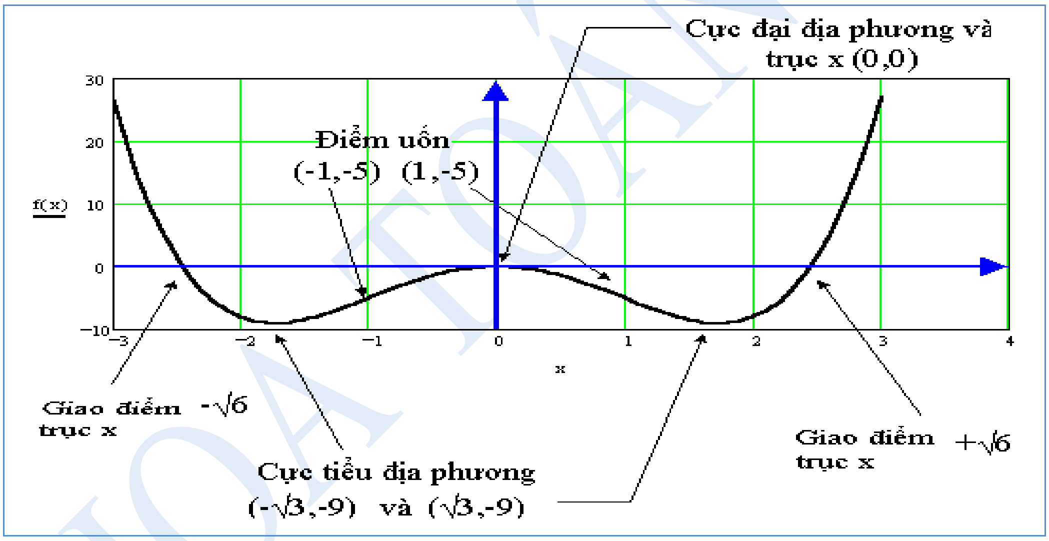
Nếu $1 < x$ thì $y'' > 0$.

Vậy dấu của y'' thay đổi khi $x = -1$. Vậy $(-1; -5)$ là điểm uốn.

Vậy dấu của y'' thay đổi khi $x = 1$. Vậy $(1; -5)$ là điểm uốn.

(vi) Đồ thị:

Bây giờ ta đã đủ dữ liệu để vẽ đồ thị:



Ví dụ 5: Vẽ đồ thị và thể hiện giao điểm với các trục đồ thị, cực đại, cực tiểu và điểm uốn:

$$y = x^5 - 5x^4$$

Trả lời ví dụ 5

Lưu ý: Câu hỏi này khá là phức tạp và đây cũng là ví dụ cho một vài rắc rối bạn có thể gặp. Nếu bạn vẫn chữa hoàn toàn hiểu, đừng lo lắng quá nhé!

(i) Giao điểm với trục x:

$$y = x^5 - 5x^4 = x^4(x-5)$$

Nên,

$$y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right.$$

(ii) Giao điểm với trục y:

Khi $x = 0$ thì $y = 0$.

(iii) Các điểm cực đại và cực tiểu:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 = 5x^3(x - 4)$$

Nên,

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Vậy ta có các điểm cực đại, cực tiểu là $(0; 0)$ và $(4; -256)$.

(iv) Đạo hàm bậc 2:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 60x^2$$

Vì $x = 0$ thì $y'' = 0$ nên $(0; 0)$ không là cực trị.

Vì $x = 4$ thì $y'' > 0$ nên $(4; -256)$ là cực tiểu địa phương.

(v) Điểm uốn:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x - 3)$$

Nên,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Nếu $x < 0$ thì $y'' < 0$.

Nếu $0 < x < 3$ thì $y'' < 0$.

Nếu $3 < x$ thì $y'' > 0$.

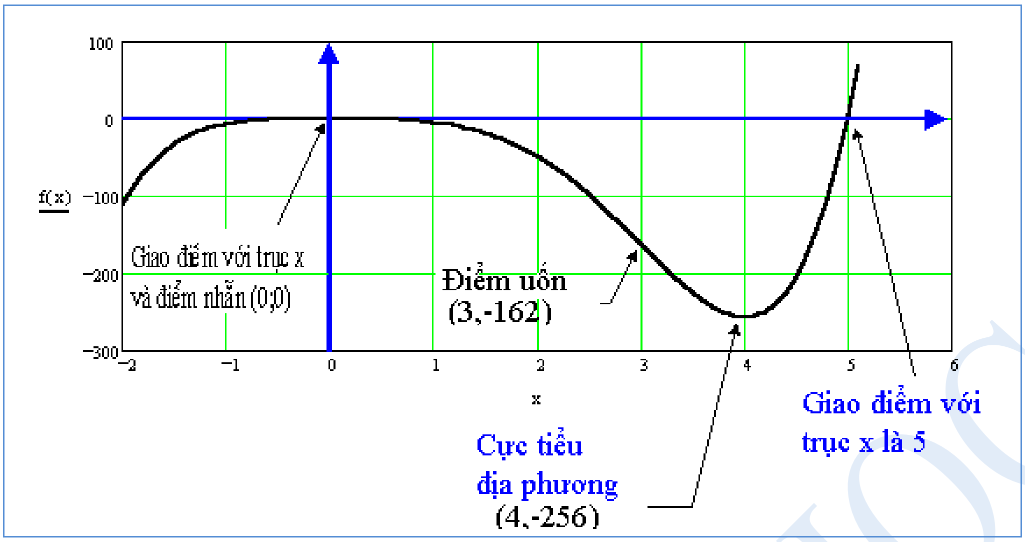
Vậy dấu của y'' không thay đổi khi $x = 0$. Vậy $(0; 0)$ không là điểm uốn.

Vậy dấu của y'' thay đổi khi $x = 3$. Vậy $(3; -162)$ là điểm uốn.

Chú ý: Thật ra tại $x = 0$ ta có điểm nhẵn. Đây không phải cực đại địa phương mặc dù nhìn hình vẽ thì có vẻ giống cực đại địa phương.

(vi) Đồ thị:

Bây giờ ta đã đủ dữ liệu để vẽ đồ thị:



Bây giờ ta sẽ nghiên cứu cách vẽ những đường cong không biểu diễn cho đa thức. Những đường cong này có thể không liên tục hay có những hình dáng đặc biệt. Do tính ứng dụng của các hình này trong cuộc sống rất lớn nên ta cần nắm rõ các dạng đồ thị, đồng thời khi sử dụng máy tính để vẽ, ta cần xác định được những lỗi sai hay hình dáng khác thường của đồ thị.

Ta sử dụng những kỹ thuật vẽ đồ thị cơ bản, kiểm tra đặc điểm của hàm số khi:

$$x \longrightarrow +\infty$$
$$x \longrightarrow -\infty$$
$$x \longrightarrow \text{bên trái điểm không liên tục}$$
$$x \longrightarrow \text{bên phải điểm không liên tục}$$

V. ĐỐI XỨNG

Ta sử dụng tính đối xứng qua trục y để vẽ đường cong.

VI. TẬP XÁC ĐỊNH VÀ TẬP GIÁ TRỊ

Tập xác định (tất cả các giá trị x có thể) và tập giá trị (giá trị y tương ứng với x) rất quan trọng để vẽ hình theo một số yêu cầu (chẳng hạn căn bậc hai).

VII. QUY TRÌNH THỰC HIỆN

Khi vẽ hình ta cần xác định:

(i) Giao điểm của đồ thị với trục x.

(ii) Giao điểm của đồ thị với trục y.

(iii) Giới hạn khi x tiến đến ∞.

(iv) Tập xác định và tập giá trị.

(v) Cực đại và cực tiểu.

(vi) Đạo hàm bậc hai.

(vii) Trạng thái đồ thị gần điểm không liên tục.

Ví dụ 6: Vẽ đồ thị:

$$y = x + \frac{4}{x^2}$$

Trả lời ví dụ 6

(i) Giao điểm với trục x:

$$x + \frac{4}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-4} \approx -1.6$$

(ii) Giao điểm với trục y:

Ta không xác định được hàm số tại $x = 0$ nên không có giao điểm của đồ thị với trục y, từ đó sẽ có tiệm cận tại $x = 0$.

(iii) Các giới hạn:

Khi $x \longrightarrow -\infty$ thì $\frac{4}{x^2} \longrightarrow 0$, vậy $y \longrightarrow -\infty$.

(Thật ra, đường cong sẽ ngày càng tiến gần đến đường thẳng $y = x$ ở phần âm).

Khi $x \longrightarrow +\infty$ thì $y \longrightarrow +\infty$.

(Thật ra, đường cong sẽ ngày càng tiến gần đến đường thẳng $y = x$ ở phần dương).

(iv) Tập xác định và tập giá trị:

Tập xác định: Mọi giá trị thực x ngoại trừ 0.

Tập giá trị: Mọi giá trị thực y.

(v) Cực đại và cực tiểu:

$$y = x + \frac{4}{x^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = 1 - 8x^{-3}$$

Ta được $1 - 8x^{-3} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy ta sẽ có cực đại hoặc cực tiểu tại điểm $(2; 3)$.

Bây giờ, khi $x \longrightarrow -\infty$ thì $\frac{dy}{dx} \longrightarrow 1$ và khi $x \longrightarrow +\infty$ thì $\frac{dy}{dx} \longrightarrow 1$.

(vi) Đạo hàm cấp 2:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{24}{x^4} > 0, \qquad \forall x$$

Vậy hàm lõm lên với mọi giá trị x, vậy điểm $(2; 3)$ là cực tiểu.

(vii) Gần điểm không liên tục:

Khi $x \longrightarrow 0^-$ (nghĩa là x tiến gần đến 0 từ phía âm) thì $y \longrightarrow \infty$.

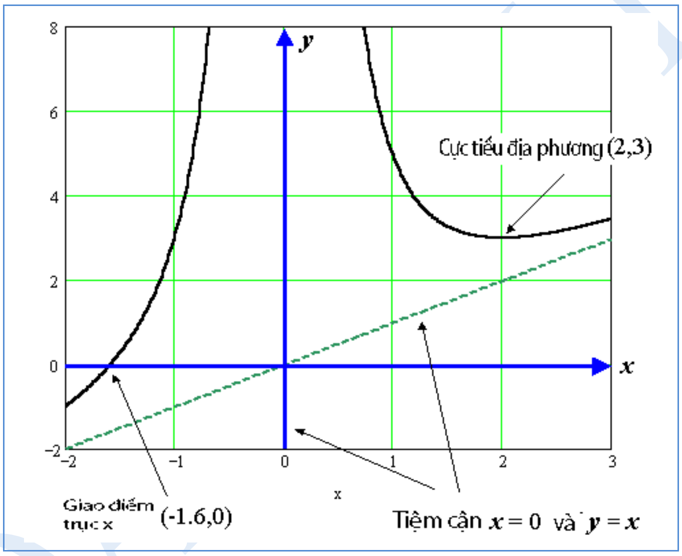
(Bạn có thể kiểm chứng bằng cách thử các giá trị $x = -1; -0.5; -0.1; -0.01; -0.001$).

Khi $x \longrightarrow 0^+$ (nghĩa là x tiến gần đến 0 từ phía dương) thì $y \longrightarrow \infty$.

(Bạn có thể kiểm chứng bằng cách thử các giá trị $x = 1; 0.5; 0.1; 0.01; 0.001$).

(viii) Đồ thị:

Bây giờ ta bắt đầu vẽ đồ thị:



Ví dụ 7: Vẽ đồ thị $y = \frac{9x}{x^2+9}$.

Trả lời ví dụ 7

(i) Giao điểm với trục x:

$$\frac{9x}{x^2 + 9} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

(ii) Giao điểm với trục y:

Khi $x = 0$ thì $y = 0$.

(iii) Giới hạn khi x tiến đến ∞:

Chia tử và mẫu cho x^2 được:

$$\frac{\frac{9}{x}}{1+\frac{9}{x^2}}$$

Khi $x \longrightarrow -\infty$ thì $y \longrightarrow 0$.

Tương tự, $x \longrightarrow +\infty$ thì $y \longrightarrow 0$.

(iv) Tập xác định và tập giá trị:

-Tập xác định: Mọi số thực x.

Tập giá trị: xem phần 5.

(v) Cực đại và cực tiểu:

$$\begin{aligned} y &= \frac{9x}{x^2+9} \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{9(x^2-9)}{x^2+9} \\ \frac{dy}{dx} &= 0 \Leftrightarrow x = \pm 3 \end{aligned}$$

Vậy ta có cực đại hoặc cực tiểu tại $(-3;-1.5)$ hoặc $(3;1.5)$.

Một vài miêu tả cho biểu thức $\frac{dy}{dx}$ là:

+ DƯƠNG khi $-3 < x < 3$.

+ ÂM khi $x < -3$ hoặc $x > 3$.

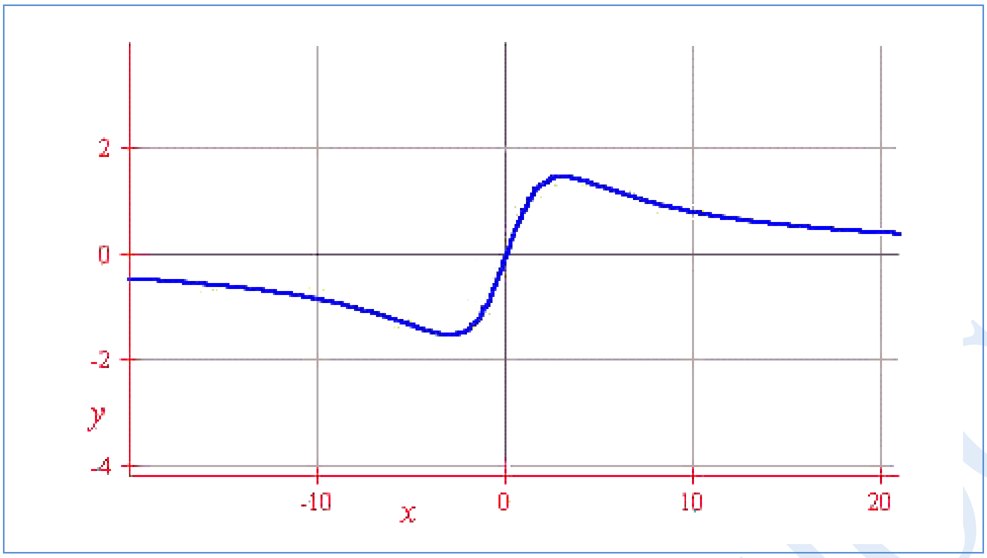
Từ đó ta kết luận rằng $(-3;-1.5)$ là cực tiểu và $(3;1.5)$ là cực đại, vậy tập giá trị là $-1.5 \leq y \leq 1.5$, đồng thời ta có độ dốc tại $x = 0$ là:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -\left.\frac{9(x^2-9)}{x^2+9}\right|_{x=0} = 1$$

(vi) Đạo hàm bậc 2:

Trong trường hợp này, đạo hàm bậc hai có vẻ như phức tạp để tính nhanh, rất dễ dẫn đến sai sót.

Bây giờ ta có thể vẽ đồ thị.


2
0
-2
y
-4
-10
x
0
10
20

BÀI 2.2.7 ÁP DỤNG VI PHÂN ĐỂ XỬ LÝ NHỮNG VẤN ĐỀ CỰC TRỊ

Quy trình tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất gọi là tối ưu hoá, là ứng dụng rất quan trọng của vi phân. Quy trình này giống như tìm lợi nhuận tối đa của một công ty, hay giảm thiểu giá thành, hay số lượng vật liệu ít nhất để tạo ra một sản phẩm nào đó. Những thứ này có ý nghĩa rất quan trọng trong các ngành công nghiệp.

Ví dụ 1: Lợi nhuận hằng ngày P của một nhà máy lọc dầu thoả công thức:

$$P = 8x - 0.02x^2$$

với x là số lượng thùng dầu đã lọc được. Với bao nhiêu thùng dầu thì công ty sẽ đạt lợi nhuận cao nhất? Giá trị lợi nhuận ấy là bao nhiêu?

Trả lời ví dụ 1

Lợi nhuận đạt giá trị cao nhất (thấp nhất) khi: $\frac{dP}{dx} = 0$.

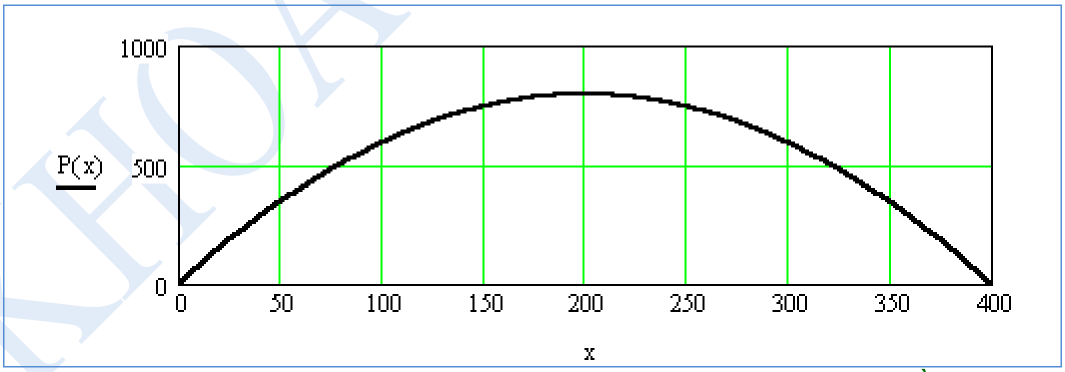
$$\frac{dP}{dx} = 8 - 0.04x$$
$$\frac{dP}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 200$$

Liệu đây có phải là giá trị lớn nhất chưa?

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -0.04 < 0, \qquad \forall x$$

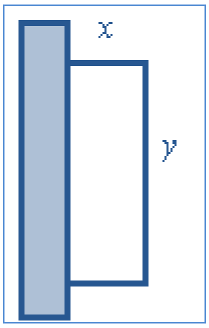
vậy ta có giá trị lớn nhất khi $x = 200$; $P = 800$ đồng.

Vậy nếu như nhà máy lọc được 200 thùng / ngày sẽ đạt được lợi nhuận cao nhất là 800 đồng.



Ví dụ 2: Một khu vực chứa hàng hình chữ nhật được xây sát, dọc theo chiều cao của một toà nhà. Một hàng rào an ninh được thiết kế nằm ở 3 mặt còn lại của khu vực đấy. Hỏi nếu có $800m$ hàng rào bao quanh hàng rào bao quanh thì diện tích tối đa của khu vực này là bao nhiêu?

Trả lời ví dụ 2



Ta có diện tích là $A = xy$.

Từ hình vẽ ta có $2x + y = 800 \Leftrightarrow y = 800 - 2x$.

Vậy diện tích là $A = x(800 - 2x) = 800x - 2x^2$.

Để tìm giá trị lớn nhất, ta tính $\frac{dA}{dx} = 0 \Leftrightarrow 800 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 200$.

Liệu $x = 200$ có là giá trị lớn nhất hay không, ta tính:

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -4 < 0, \qquad \forall x$$

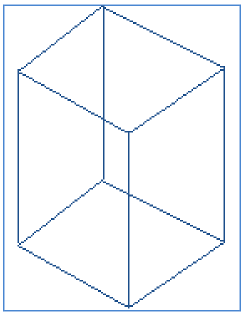
Vậy $x = 200$ là giá trị lớn nhất.

Vậy diện tích lớn nhất xảy ra khi $x = 200;\ y = 400$. Từ đó ta tính được diện tích là:

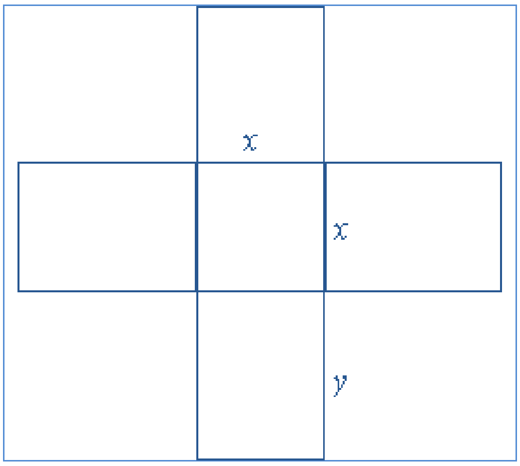
$$A = 200 \cdot 400 = 80\,000\ m^2 = 8\ ha$$

Ví dụ 3: Một hộp có đáy hình vuông, không có nắp. Nếu ta sử dụng $64\ cm^2$ vật liệu thì thể tích tối đa của cái hộp là bao nhiêu?

Trả lời ví dụ 3



Mở 4 mặt có cạnh chung với mặt đáy ra, ta được ảnh sau:



Thể tích hình hộp là $V = x^2y$.

Ta biết diện tích bề mặt của hộp là $64\ cm^2$. Diện tích mặt đáy là x^2 và diện tích mỗi mặt bên là xy. Vậy diện tích toàn phần của hộp là $x^2 + 64xy = 64\ cm^2$.

Chuyển vế theo y, ta được $y = \frac{16}{x} - \frac{x}{4}$.

Ta viết lại thể tích:

$$V = x^2y = 16x - \frac{x^3}{4}$$

Bây giờ:

$$\frac{dV}{dx} = 16 - \frac{3x^2}{4}$$
$$\frac{dV}{dx} = 0 \Leftrightarrow 16 - \frac{3x^2}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{8}{\sqrt{3}} \approx 4.62$$

Lưu ý: trường hợp âm không xảy ra vì không có ý nghĩa.

Ta kiểm tra xem giá trị x có phải giá trị lớn nhất chưa, bằng cách:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{3x}{2} < 0, \qquad \forall x > 0$$

Vậy x tìm được là giá trị lớn nhất.

Vậy kích thước của hộp là:

Đáy: $4.62\ cm \times 4.62\ cm$.

Các mặt bên: $4.62\ cm \times 2.31\ cm$.

Thể tích tối đa của hộp là: $4.62 \cdot 4.62 \cdot 2.31 \approx 49.3\ cm^3$.

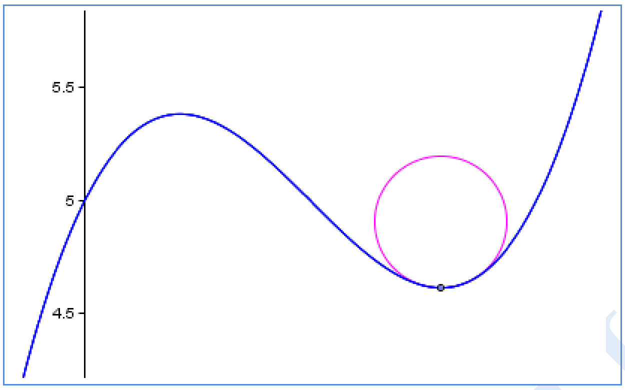
Thử lại: Diện tích vật liệu là:

$$x^2 + 4xy = 21.3 + 4 \cdot 4.62 \cdot 2.31 = 64$$

Kết quả thử lại phù hợp.

BÀI 2.2.8 BÁN KÍNH CONG

Ta có thể vẽ một vòng tròn một cách sát, vừa khớp với những điểm nằm trong 1 đoạn của đường cong như hình dưới đây:



Bán kính cong của một đường cong được định nghĩa là bán kính của một đường tròn trùng với một phần cung của đường cong. Tuy nhiên một đường cong thì có những cung khác nhau ứng với độ cong khác nhau. Vậy làm thế nào để xác định được sự thay đổi của bán kính cong?

Công thức bán kính cong ở bất kỳ điểm x của đường cong $y = f(x)$ là:

Bán kính cong:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{K} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

Chứng minh

Độ cong của một đường cong cho trước ở một số điểm nhất định là độ cong của một đường tròn trùng với 1 phần cung của đường cong tại các điểm đó. Trong bài viết này ta tạm gọi đó là đường tròn χ.

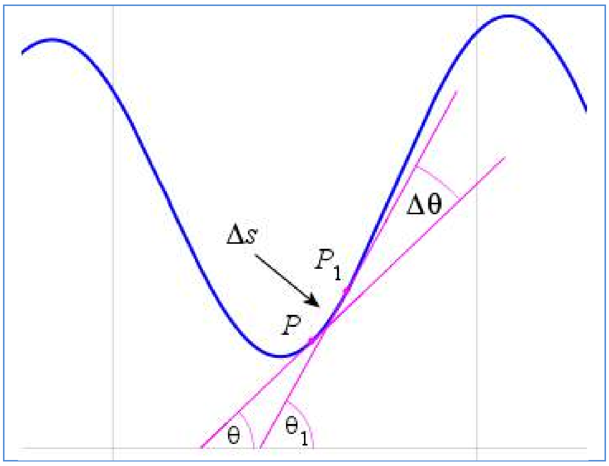
Độ cong phụ thuộc vào bán kính, bán kính càng nhỏ thì độ cong càng lớn (tiến tới các điểm ở cực biên). Bán kính càng lớn thì độ cong càng nhỏ. Từ đó ta suy luận được rằng nếu có một đường tròn χ rất lớn thì điều đó có nghĩa đường cong tại các điểm tương ứng với đường tròn χ gần như là một đường thẳng.

Bán kính cong $\mathfrak{R}$ có mối liên hệ mật thiết với chính độ cong đó. Cụ thể:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{K}$$

Vậy ta sẽ đi tìm độ cong đầu tiên, sau đó áp dụng công thức trên ta sẽ tìm ra được bán kính.

Giả sử $P; P_1$ là hai điểm khác nhau trên đường cong và ở rất gần nhau, ví dụ như hình dưới đây:



Đặt Δs là độ dài cung PP_1.

Đặt $\Delta\theta$ là góc tạo bởi tiếp tuyến từ P di chuyển đến P_1.

Độ cong của cung từ P đến P_1 là $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$.

Bây giờ cung K tại P xác định bởi:

$$K = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$$

Ta cần tìm $\frac{d\theta}{ds}$ bằng cách tách thành:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx}\frac{dx}{ds}$$

Lưu ý rằng ta có $\tan(\theta) = \frac{dy}{dx}$ (công thức độ dốc của cung tại 1 điểm) nên:

$$\theta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Vậy ta được:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$$

Ta có đạo hàm của $y = \arctan(u)$, $(u = f(x))$ là $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$ (sẽ chứng minh trong các bài viết sau).

Với $u = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ta tiến hành vi phân như sau:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Tiếp theo, ta tính $\frac{dx}{ds}$ bằng cách:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

Vậy ta được:

$$K = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}$$

Từ đó ta tính được bán kính cong là:

$$\Re = \frac{1}{K} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Đương nhiên giá trị của bán kính phải là số dương nên ta lấy trị tuyệt đối mẫu số của phân số trên. Cuối cùng ta được:

$$\Re = \frac{1}{K} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

Ứng dụng thực tiễn: Khi các kỹ sư thiết kế đường ray xe lửa, họ cần phải bảo đảm độ cong của đường ray phải an toàn và đảm bảo được xe lửa chạy trên đường ray theo một tốc độ cho trước một cách trơn tru.

Ví dụ 1: Xác định bán kính cong của hàm bậc 3:

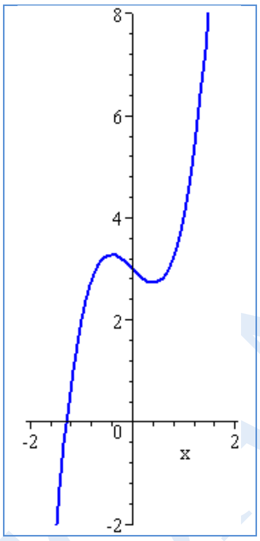
$$y = 2x^3 - x + 3$$

tại $x = 1$.

Trả lời ví dụ 1

Đầu tiên ta cần vẽ đồ thị để tiện trong việc tính toán:

$$y = 2x^3 - x + 3$$



$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 1$$

Sau đó:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (6x^2 - 1)^2 = 36x^4 - 12x^2 + 1$$

Thay vào công thức bán kính cong, ta được kết quả:

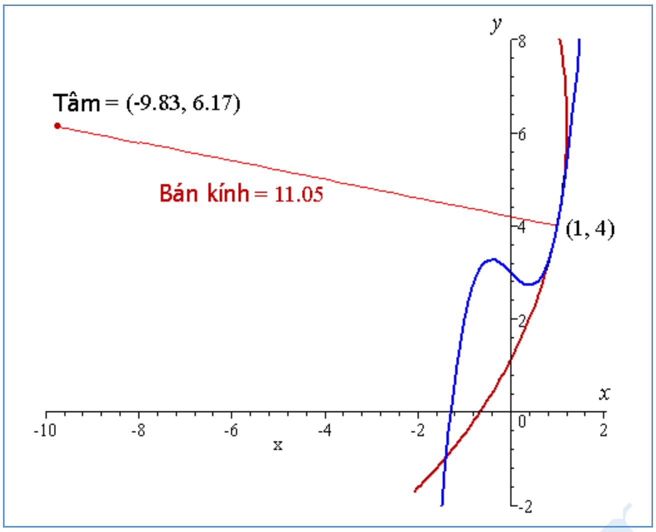
$$\Re = \frac{1}{K} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(36x^4 - 12x^2 + 2)^{3/2}}{|12x|}$$

Vậy bán kính cong tại $x = 1$ là:

$$\left.\frac{(36x^4 - 12x^2 + 2)^{3/2}}{|12x|}\right|_{x=1} = 11.047\,875\,62$$

Bây giờ ta xem "thành phẩm" đạt được. Nhìn vào đồ thị dưới đây với đường cong (màu xanh) với đường tròn (màu đỏ đậm) nằm lên trên. Đường tròn trên là phù hợp nhất để trở thành đường tròn χ (đã được định nghĩa ban đầu) tại điểm $(1; 4)$

Ta có thể biểu diễn tâm đường tròn χ là $(-9.8; 6.17)$.



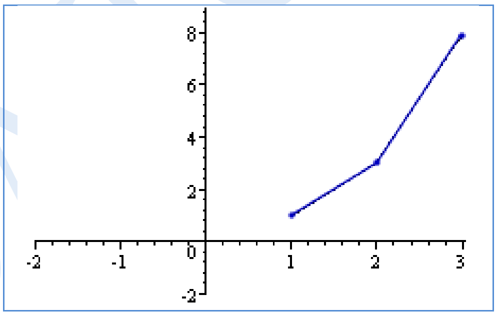
Ví dụ 2: Giả sử ta có đồ thị được tạo thành bởi các điểm cho trước và ta không biết hàm số của đồ thị này. Vậy làm thế nào ta xác định được bán kính cong của đồ thị đó?

Lấy bất kỳ 3 điểm nhằm mường tượng cách thức giải quyết vấn đề. Giả sử 3 điểm đó là $(1;1)$, $(2;3)$, $(3;8)$.

Ta sẽ giải quyết bài này theo ba cách khác nhau,

Cách 1: Tính xấp xỉ bằng hình Parabola thích hợp và công thức vi tích phân:

Ta có đồ thị gắn với 3 điểm $(1;1)$, $(2;3)$, $(3;8)$.



Có một cách để tìm bán kính cong đó là tìm hình parabola thích hợp đi qua 3 điểm này. Parabola là đường cong tuyệt hảo để xác định đường cong gần đúng nhất cho một số hữu hạn điểm.

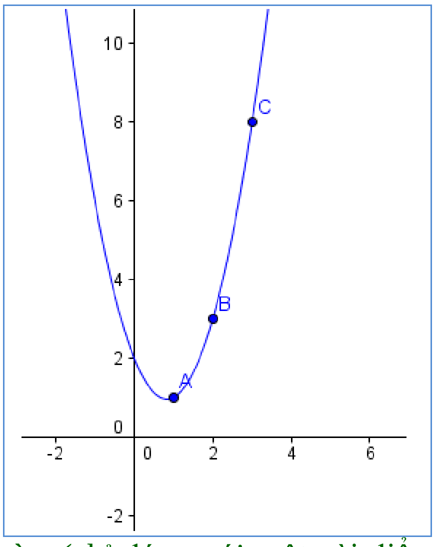
Theo chương trình toán cấp 2, đồ thị Parabola có dạng:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Thay thế toạ độ ba điểm đã cho, giải hệ phương trình, ta được kết quả:

$$y = 1.5x^2 - 2.5x + 2$$

Vậy ta được hình parabola sau:



Xem như đây là hàm số ta cần tìm (chỉ đúng với một vài điểm cho trước), sử dụng công thức bán kính cong:

Bán kính cong:

$$\Re = \frac{1}{K} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

Ta xác định đạo hàm cấp 1 và cấp 2 và giá trị của chúng tại điểm giữa $(2; 3)$.

$$\frac{dy}{dx} = 3x - 2.5$$

Tại $x = 2$ thì $\frac{dy}{dx} = 3.5$.

Đạo hàm cấp 2:

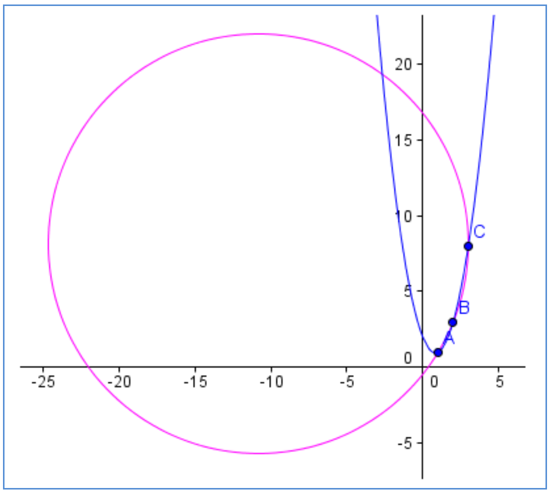
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3$$

Vậy bán kính cong tại điểm giữa $(2; 3)$ là:

$$\frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} = 16.08$$

Vậy ta đã tìm được hình parabola gần đúng nhất với hàm số ứng với hữu hạn điểm gần với những điểm đã cho, và từ đó ta cũng xác định được bán kính cong, cũng chính là bán kính đường tròn gần sát với đường cong, gần với các dữ liệu đã cho ban đầu.

Hình dưới đây biểu diễn 3 điểm, hình parabola ta tìm được và đường tròn ứng với độ cong tạo bởi ba điểm cho trước có bán kính 16.08.



Cách 2: Sử dụng phép xấp xỉ tuyến tính và công thức vi tích phân:

Ta có thể tính xấp xỉ giá trị $\frac{dy}{dx}$ tại điểm giữa $(2;3)$ như sau:

Độ dốc (hệ số góc) của đường thẳng đi qua 2 điểm $(1;1)$ và $(2;3)$ là:

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$$

Độ dốc (hệ số góc) của đường thẳng đi qua 2 điểm $(2;3)$ và $(3;8)$ là:

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{1} = 5$$

Ta tính trị số trung bình của 2 giá trị độ dốc để ra được giá trị "thô" của $\frac{dy}{dx}$.

Độ dốc trung bình $= \frac{2+5}{2} = 3.5 \approx \frac{dy}{dx}$.

Với độ dốc của độ dốc (tức đạo hàm bậc 2), ta xác định tốc độ thay đổi độ dốc m chia cho tốc độ thay đổi của x trong khoảng $[1.5; 2.5]$ (giá trị 2 biên là điểm giữa của 2 điểm mà đoạn thẳng đi qua).

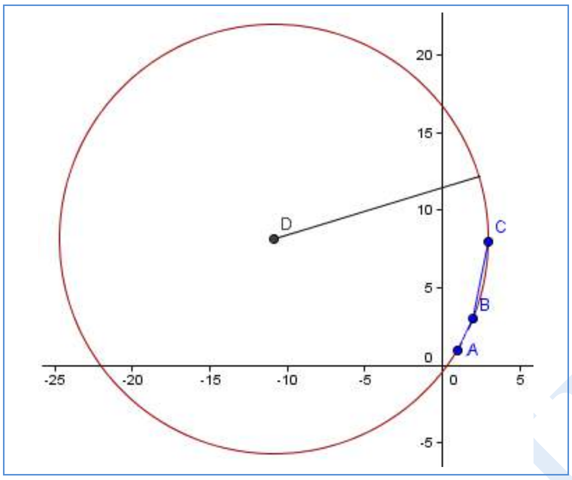
Độ dốc của độ dốc $= \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{5-2}{1} = 3 \approx \frac{d^2y}{dx^2}$.

Khá là trùng hợp, giá trị xấp xỉ này lại chính xác với giá trị ta tính được ở Cách 1.

Thay thế các giá trị cần thiết vào công thức bán kính cong, ta được giá trị bằng gới giá trị tính được ở cách 1.

$$\frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} = 16.08$$

Kiểm tra đáp án theo hình dưới đây, ta thấy đường tròn xấp xỉ χ (màu đỏ tối, tâm D, bán kính 16.08) đi qua 3 điểm cho trước. Điều này vẫn đúng khi ta lấy tốc độ trung bình chính xác hơn để có được giá trị phù hợp nhất cho đạo hàm bậc 1 và bậc 2.



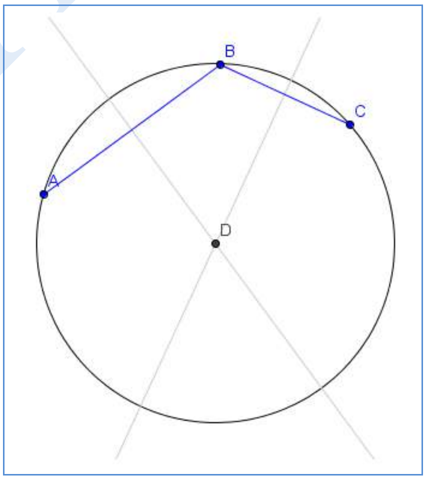
Cách 3: Tìm bán kính đường tròn đi qua 3 điểm.

Đây chính là cách chính xác nhất để tìm bán kính cong. Bằng kiến thức toán phổ thông, ta dễ dàng xác định phương trình đường tròn đó.

Tổng quát, giá trị x cho tâm đường tròn đi qua ba điểm $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2); C(x_3; y_3)$ cùng với 2 đường thẳng có độ dốc m_1 và m_2 là:

$$x_c = \frac{m_1 m_2 (y_1 - y_3) + m_2(x_1 + x_2) - m_1(x_2 + x_3)}{2(m_2 - m_1)}$$

Công thức trên dựa theo việc tìm giao điểm các đường trung trực của 2 đương thẳng đi qua 3 điểm như hình dưới đây:



Vậy với các điểm đã cho, ta tính được giá trị $x_c = -10.833$ (giá trị $m_1; m_2$ tính ở công thức 2).

Với giá trị y của tâm, công thức cho đường trục trực đầu tiên là:

$$y_{\text{trung trực}} = -\frac{1}{m_1}\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Vậy với những điểm đã cho, ta tính được giá trị y chỉ với việc thay số:

$$y_c = 8.166\,5$$

Vậy tâm đường tròn qua ba điểm $(1;1), (2;3), (3;8)$ là $(-10.83; 8.17)$.

Cuối cùng, ta xác định bán kính bằng cách tính khoảng cách từ tâm đến bất kỳ 1 trong 3 điểm đã cho. Ở đây tôi chọn $(1;1)$.

Bán kính: $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \approx 13.834$.

Vậy ta đã tìm được bán kính đường tròn là 13.834, đáp án này chính xác nhất và ta cũng có thể thấy sự khác biệt rõ so với cách 1 và cách 2.

PHẦN 2.3: ĐẠO HÀM HÀM SỐ SIÊU VIỆT

BÀI 2.3.1 MỞ ĐẦU

Có rất nhiều ứng dụng khoa học, kỹ thuật của hàm mũ (e^x), hàm số logarithm $(\log(x))$ và hàm lượng giác $(\sin(x)\,;\cos(x)\,;\ldots)$. Trong phần này, ta sẽ tìm công thức tính đạo hàm của hàm số siêu việt. Ta cần biết tốc độ thay đổi của hàm số.

Trong phần này:

+ Bài 2.3.1 Đạo hàm số hàm lượng giác và ứng dụng: Ta sẽ nghiên cứu đạo hàm của hàm số sine, cosine, tangent, cosecant, secant và cotangent cũng như hàm ngược của nó. Ngoài ra ta sẽ nghiên cứu thêm vài ứng dụng của nó như tốc độ thay đổi, cơ khí, phương trình chuẩn.

+ Bài 2.3.2 Đạo hàm hàm số logarithm, hàm mũ và ứng dụng: Ta sẽ biết cách đạo hàm hàm số logarithm, hàm số mũ và vài ứng dụng của nó như bán kính cong, sự tối đa hóa, cường độ âm thanh, hàng không, điện.

BÀI 2.3.2 ĐẠO HÀM HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ỨNG DỤNG

Hiện nay hàm mũ (e^x), hàm logarithm ($\log(x)$), hàm số lượng giác ($\sin(x)$; $\cos(x)$; ...) có rất nhiều ứng dụng trong các ngành khoa học, kỹ thuật, gọi là các hàm siêu việt. Sau đây tôi xin cung cấp một số công thức cơ bản của hàm lượng giác. Việc chứng minh chủ yếu dựa vào định nghĩa đạo hàm.

$$\frac{d(\sin(x))}{dx} = \cos(x)$$
$$\frac{d(\cos(x))}{dx} = -\sin(x)$$
$$\frac{d(\tan(x))}{dx} = \sec^2(x)$$
$$\frac{d(\csc(x))}{dx} = -\csc(x)\cot(x)$$
$$\frac{d(\sec(x))}{dx} = \sec(x)\tan(x)$$
$$\frac{d(\cot(x))}{dx} = -\csc^2(x)$$

Nếu $u = f(x)$ là hàm số theo biến x, khi đó, sử dụng quy tắc xích, ta được:

$$\frac{d(\sin(u))}{dx} = \cos(u)\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d(\cos(u))}{dx} = -\sin(u)\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d(\tan(u))}{dx} = \sec^2(u)\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d(\csc(u))}{dx} = -\csc(u)\cot(u)\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d(\sec(u))}{dx} = \sec(u)\tan(u)\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d(\cot(u))}{dx} = -\csc^2(u)\frac{du}{dx}$$

Ví dụ 1: Tính vi phân $y = \sin(x^2 + 3)$.

Trả lời ví dụ 1

Đầu tiên, đặt $u = x^2 + 3$, vì vậy ta được $y = \sin(u)$.

Ta có:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$
$$= \cos(u)\frac{du}{dx}$$

$$= \cos(x^2+3)\frac{d(x^2+3)}{dx}$$

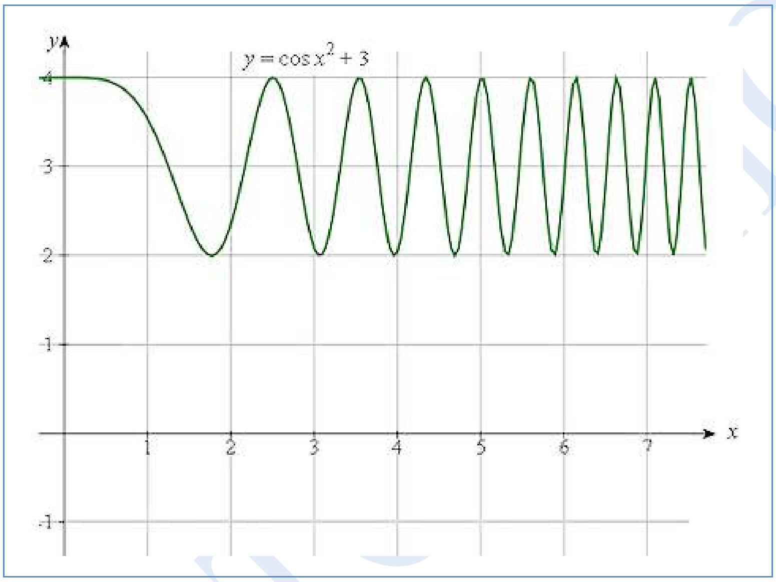
$$= 2x\cos(x^2+3)$$

Quan trọng: $\cos(x^2+3)$ khác với $\cos(x^2)+3$.

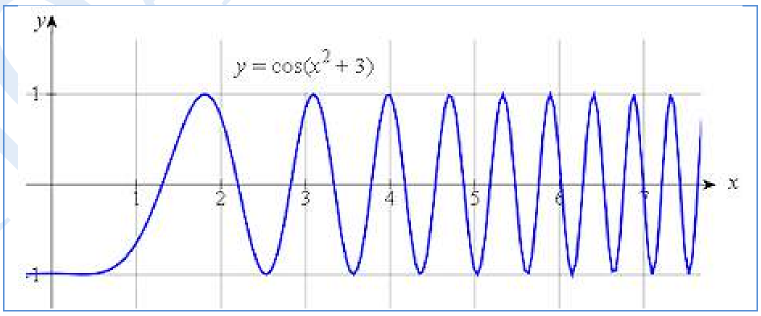
Dấu ngoặc có ý nghĩa khác biệt rất lớn. Nhiều học sinh đã mắc sai lầm khi gặp dấu ngoặc.

Dưới đây là đồ thị của $y=\cos(x^2)+3$ (màu xanh lá) và $y=\cos(x^2+3)$ (màu xanh dương).

Đồ thị đầu tiên, $y=\cos(x^2)+3$ có nghĩa là đường cong $y=\cos(x^2)$ đi lên 3 đơn vị.



Đồ thị thứ 2, $y=\cos(x^2+3)$ có nghĩa là ta phải tính giá trị x^2+3 trước, sau đó mới tính kết quả cosine:



Hai kết quả rất khác biệt.

Ví dụ 2: Tính đạo hàm hàm 2 ẩn:

$$x\cos(2y)+\sin(x)\cos(y)=1$$

Trả lời ví dụ 2

Phương trình hàm 2 ẩn:

$$x\cos(2y) + \sin(x)\cos(y) = 1$$

Đạo hàm:

$$x(-2\sin(2y))\frac{dy}{dx} + (\cos(2y))(1) + \sin(x)\left(-\sin(y)\frac{dy}{dx}\right) + \cos(y)\cos(x) = 0$$

Vậy,

$$(-2x\sin(2y) - \sin(x)\sin(y))\frac{dy}{dx} = -\cos(2y) - \cos(y)\cos(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(2y) + \cos(y)\cos(x)}{2x\sin(2y) + \sin(x)\sin(y)}$$

Ví dụ 3: Một dòng điện (đơn vị Ampere – A) trong mạch máy khuếch đại tuân theo hàm số theo thời gian t (giây – s) là:

$$i = 0.10\cos\left(120\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

xác định biểu thức của điện áp đi qua cuộn cảm có độ lớn 2.0 mH. Biết rằng:

$$V_L = L\frac{di}{dt}$$

Trả lời ví dụ 3

$$\begin{aligned} V_L &= L\frac{di}{dt} \\ &= 0.002\frac{di}{dt} \\ &= 0.002(0.10)(120\pi)\left(-\sin\left(120\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= -0.024\pi\sin\left(120\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Sử dụng quy tắc thương số cũng như đồng nhất thức lượng giác, ta có các công thức sau:

$$\frac{d(\csc(x))}{dx} = -\csc(x)\cot(x)$$
$$\frac{d(\sec(x))}{dx} = \sec(x)\tan(x)$$
$$\frac{d(\cot(x))}{dx} = -\csc^2(x)$$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm hàm số:

$$3\cot(x + y) = \cot(y^2)$$

Trả lời ví dụ 4

Đây là hàm số 2 ẩn:

$$3\cot(x+y) = \cot(y^2)$$

Đạo hàm vế trái, ta được:

$$-3\csc^2(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

Đạo hàm vế phải, ta được:

$$(-\sin(y^2))\left(2y\frac{dy}{dx}\right)$$

Vậy ta được kết quả:

$$\begin{aligned}
&-3\csc^2(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = (-\sin(y^2))\left(2y\frac{dy}{dx}\right)\\
&\Leftrightarrow -3\csc^2(x+y) - 3\csc^2(x+y)\frac{dy}{dx} = -2y\sin(y^2)\frac{dy}{dx}\\
&\Leftrightarrow (2y\sin(y^2) - 3\csc^2(x+y))\frac{dy}{dx} = 3\csc^2(x+y)\\
&\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3\csc^2(x+y)}{2y\sin(y^2) - 3\csc^2(x+y)}
\end{aligned}$$

Lưu ý: Ta cũng có công thức đạo hàm hàm lượng giác ngược.

Ta cần nhắc lại khái niệm. Biểu thức $\sin^{-1}(x)$ có nghĩa rằng ta phải tìm một góc Φ nào đó để $\sin(\Phi) = x$.

Ngoài ký hiệu $\sin^{-1}(x)$ thì ký hiệu $\arcsin(x)$ cũng có ý nghĩa tương tự. Tuy nhiên việc sử dụng arcsin sẽ tốt hơn sử dụng $\sin^{-1}$ nhằm tránh nhầm lẫn với giá trị nghịch đảo, như $3^{-1} = \frac{1}{3}$. Trong bài viết sẽ sử dụng ký hiệu $\sin^{-1}$ để trùng khớp với ký hiệu trên máy tính.

$$\begin{aligned}
\frac{d(\sin^{-1}(u))}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}\\
\frac{d(\cos^{-1}(u))}{dx} &= \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}\\
\frac{d(\tan^{-1}(u))}{dx} &= \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

Ví dụ 5: xác định $\frac{dy}{dx}$ của:

$$x + y = \tan^{-1}(x^2 + 3y)$$

Trả lời ví dụ 5

Đạo hàm hai vế, ta được:

$$x + y = \tan^{-1}(x^2 + 3y)$$

$$\Longrightarrow 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + (x^2 + 3y)^2}\left(2x + 3\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 1 - (x^2 + 3y)^2}{-2 + (x^2 + 3y)^2}$$

Bây giờ ta sẽ sử dụng đạo hàm hàm số lượng giác cũng như hàm lượng giác ngược để giải quyết một số vấn đề.

Ví dụ 6: Xác định phương trình pháp tuyến của đường cong:

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

tại $x = 2$.

Trả lời ví dụ 6

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Khi $x = 3$ thì biểu thức trên là $0.153\,846$.

Vậy độ dốc tiếp tuyến tại $x = 3$ là $0.153\,846$.

Độ dốc pháp tuyến tại $x = 3$ là:

$$-\frac{1}{0.153\,846} = -6.5$$

Vậy phương trình pháp tuyến tại điểm $x = 3y = 0.982\,8$ là:

$$y - 0.982\,8 = -6.5(x - 3)$$
$$\Leftrightarrow y = -6.5x + 20.483$$

Ví dụ 7:

Một mạch điện có công suất P, trở kháng có góc lệch pha là θ. Công suất biểu kiến P_a của mạch có biểu thức:

$$P_a = P\sec(\theta)$$

Giả sử $P = 12\ W$, xác định tốc độ biến thiên của P_a khi θ thay đổi với tốc độ 0.05 rad/phút. Giả sử ban đầu $\theta = 40°$.

Trả lời ví dụ 7

Sử dụng quy tắc xích, ta được:

$$\frac{dP_a}{dt} = \frac{dP_a}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

Ta có $P_a = P\sec(\theta) = 12\sec(\theta)$ (vì $P = 12\ W$).

$$\frac{dP_a}{d\theta} = 12\sec(\theta)\tan(\theta)$$

Ta có:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.05$$

Vậy,

$$\frac{dP_a}{d\theta} = 12\sec(\theta)\tan(\theta) = 0.6\sec(\theta)\tan(\theta)$$

Khi $\theta = 40°$, biểu thức trên bằng với $0.657\ \ W/$phút.

Ví dụ 8: Một thiết bị được lập trình để di chuyển một công cụ khắc tuân theo biểu thức $x = 2\cos(3t)$ và $y = \cos(2t)$. Kích thước tính theo cm và thời gian t tính theo s. xác định vận tốc của dụng cụ khi $t = 4.1\ s$.

Trả lời ví dụ 8

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -6\sin(3t)$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = -2\sin(2t)$$

Tại $t = 4.1$ thì $v_x = 1.579$ và $v_y = -1.88$.

Vậy:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2.46\ cm/s$$

Nói về vận tốc, ta cần phải xác định được phương hướng. Trước hết ta gần tìm ra góc nhọn thích hợp (góc dùng để làm mốc):

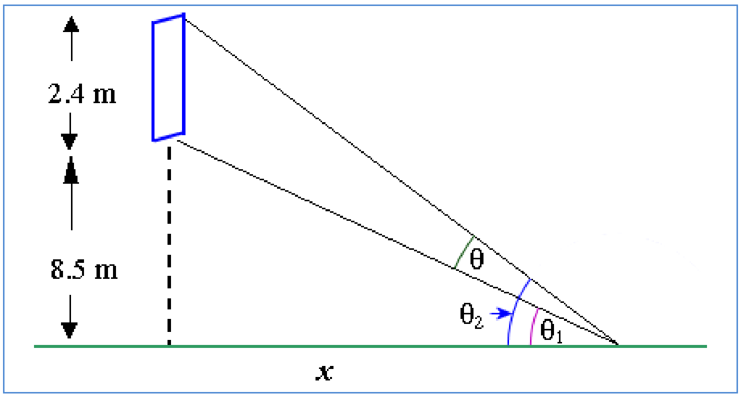
$$\alpha - \tan^{-1}\left(\frac{1.88}{1.579}\right) = 50°$$

Xét trên vòng tròn lượng giác, ta đang ở góc phần tư thứ 4 vì v_x dương và v_y âm. Vì vậy góc cần tìm là:

$$360° - 50° = 310°$$

Ví dụ 9: Màn hình TV đặt thẳng đứng tại sân vận động, cao $2.4\ m$, cạnh thấp nhất nằm phía trên tầm mắt khán giả A ngồi dưới nó là $8.5\ m$. Giả sử khán giả B có góc quan sát TV là thuận lợi nhất khi đối diện với màn hình TV là cực đại, khi đó khoảng cách giữa khán giả B đến khán giả A là bao nhiêu?

Trả lời ví dụ 9



Ta xác định $\theta_1; \theta_2$ như hình trên, từ đó ta được $\theta = \theta_2 - \theta_1$.

Giả sử x là khoảng cách từ khán giả B đến khán giả A, để tính giá trị θ cực đại, ta cần tìm $\frac{d\theta}{dx}$ và cho nó bằng 0.

Ta lưu ý rằng:

$$\tan(\theta_1) = \frac{8.5}{x} b$$
$$\tan(\theta_2) = \frac{10.9}{x}$$

Điều này dẫn đến:

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{8.5}{x}\right)$$
$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{10.9}{x}\right)$$

Vậy ta được:

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{10.9}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{8.5}{x}\right)$$

Tính đạo hàm:

$$\frac{d\theta}{dx} = -2.4x^2 + 222.36$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = 0 \Leftrightarrow -2.4x^2 + 222.36 = 0 \Leftrightarrow x = 9.63$$

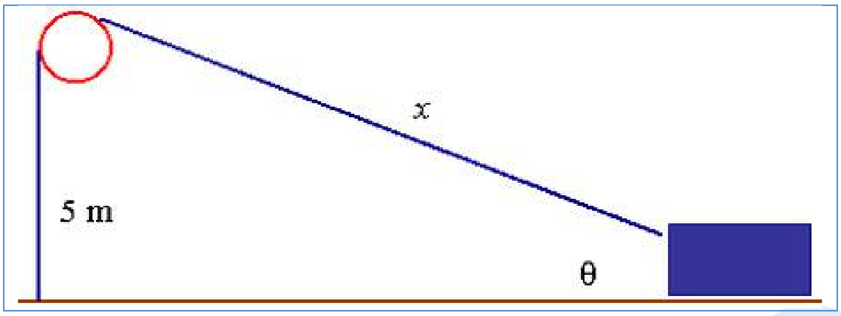
Vì ta tính khoảng cách nên ta lấy giá trị dương.

Vậy khoảng cách từ khán giả B đến khán giả A là 9.63 cm.

Ví dụ 10: Một trục cuộn tại một sân bốc dỡ hàng dùng để kéo lê container trên mặt đất. Trục cuộn quay dây cáp với tốc độ 2 m/s và trục cách mặt đất 5 m. Hỏi với tốc độ nào thì góc θ tạo bởi dây cáp và mặt đất thay đổi sau khi trục cuốn được 10 m dây cáp?

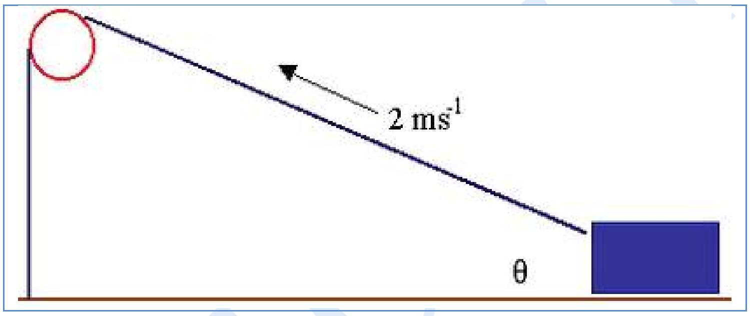
Trả lời ví dụ 10

Sơ đồ vô hướng (chỉ bao gồm khoảng cách):



Ta có thể thấy rằng $\sin(\theta) = \frac{5}{x}$ nên $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{5}{x}\right)$.

Sơ đồ vector (bao gồm vận tốc):



Ta còn có:

$$\frac{dx}{dt} = -2\ m/s$$

Do ta cần tìm $\frac{d\theta}{dt}$ nên ta sử dụng:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Vì $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{5}{x}\right)$ nên ta được:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{-5}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{5}{x}\right)^2}}$$

Vậy:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{-5}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{5}{x}\right)^2}}\cdot(-2) = \frac{10}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{5}{x}\right)^2}}$$

Ta muốn biết tốc độ biến thiên khi $x = 10$, thay giá trị này vào biểu thức trên, ta được kết quả:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.1155\ rad/s$$

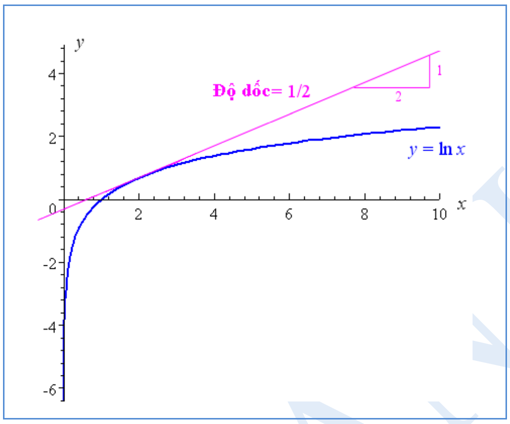
BÀI 2.3.3 ĐẠO HÀM HÀM SỐ LOGARITHM, HÀM MŨ VÀ ỨNG DỤNG

I. ĐẠO HÀM HÀM SỐ LOGARITHM

Đầu tiên ta quan sát đồ thị hàm số logarithm cơ số e:

$$f(x) = \log_e(x)$$

Hàm số này thường được viết gọn thành $\ln(e)$. Tiếp tuyến tại điểm $x = 2$ được cho ở trên đồ thị.



Độ dốc tiếp tuyến tại $x = 2$ là $\frac{1}{2}$ (Ta có thể xác định điều này bằng cách nhìn vào tỉ lệ tung / hoành).

Nếu $y = \ln(x)$, ta xét:

x	1	2	3	4	5
Độ dốc đồ thị	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

Ta thấy rằng độ dốc tại mỗi điểm trên đồ thị trùng với giá trị điểm đó trên hàm số $\frac{1}{x}$. Điều này đúng với mọi giá trị x dương (ta không có logarithm của số âm).

Nếu ta làm nhiều ví dụ nữa, ta sẽ xác định được đạo hàm của hàm số $y = \ln(x) = \frac{1}{x}$. Hay nói cách khác:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Lưu ý 1: Thật ra kết quả này có được từ bài "*Nguyên lý cơ bản để tính đạo hàm*".

Lưu ý 2: Ta đang sử dụng logarithm với cơ số e. Nhắc lại định nghĩa hàm số logarithm: "Với a là một số dương và b là một số dương, số thực n thỏa mãn $a^n = b$ được gọi là logarithm cơ số a của b. Ký hiệu $\log_a(b)$". Ở bài trên, e là giá trị giới hạn của:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

1. Đạo hàm hàm số logarithm $y = \ln(x)$

Cách viết đạo hàm hàm số logarithm có thể là:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_e(x)) = \frac{1}{x}$$

Nếu $y = \ln(x)$ thì:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(2x)$.

Trả lời ví dụ 1

Ta sử dụng công thức:

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

Ta viết lại đề bài:

$$y = \ln(2x) = \ln(2) + \ln(x)$$

Đạo hàm của hằng số bằng 0, vậy:

$$\frac{d}{dx}(\ln(2)) = 0$$

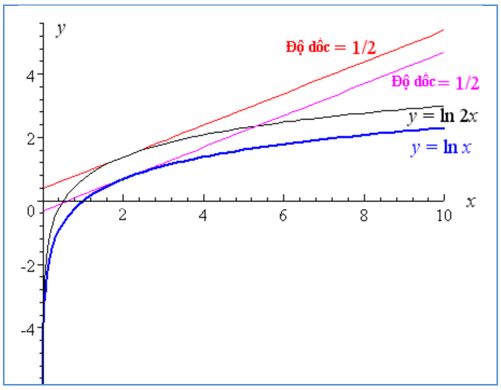
Vậy ta còn:

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

Đáp án là:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Ta quan sát đồ thị dưới đây biểu diễn độ dốc của đồ thị $y = \ln(2x)$ (đường cong màu đen, tiếp tuyến màu đỏ), hình dạng giống với đồ thị $y = \ln(x)$ (đường cong màu xanh, độ dốc màu hồng) tại điểm $x = 2$.



2. Đạo hàm hàm số $y = \ln(u)$ (với u là hàm số theo x)

Ta không thể chỉ đơn thuần sử dụng các quy tắc cộng trừ nhân chia trong logarithm để giải quyết. Trong những bài toán thực tế yêu cầu ta tính đạo hàm logarithm của một hàm số nào đó theo x. Ví dụ như đạo hàm $y = 2\ln(3x^2 - 1)$.

Ta sử dụng công thức hàm số hợp để giải quyết bài toán. Nếu $y = \ln(u)\,; u = f(x)$ thì:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u}$$

với u' là đạo hàm của u.

Một cách viết khác:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

Bạn có thể thấy có cách viết sau, ý nghĩa không đổi. Nếu $y = \ln\big(f(x)\big)$ thì đạo hàm của y là:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm hàm số $y = \ln\big(\sin(2x)\sqrt{x^2+1}\big)$.

Trả lời ví dụ 2

Đầu tiên ta sử dụng công thức logarithm sau để đơn giản hóa bài toán:

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

và,

$$\log(a^n) = n\log(a)$$

Vậy ta có thể viết lại biểu thức của đề bài thành:

$$y = \ln\left(\sin(2x)\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= \ln(\sin(2x)) + \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= \ln(\sin(2x)) + \ln\left((x^2+1)^{1/2}\right)$$

$$= \ln(\sin(2x)) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Tiếp theo, ta dùng quy tắc sau để tính đạo hàm (sử dụng 2 lần):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u}$$

Với $u = \sin(2x) \Longrightarrow u' = 2\cos(2x)$.

Với $u = x^2 + 1 \Longrightarrow u' = 2x$.

Vậy ta có đáp án:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} = 2\cot(2x) + \frac{x}{x^2+1}$$

3. Đạo hàm hàm số logarithm với cơ số khác số *e*

Nếu $u = f(x)$ là hàm số theo x và $y = \log_b(u)$ là hàm số logarithm theo cơ số b thì ta có được đạo hàm của hàm logarithm với cơ số b là:

$$\frac{dy}{dx} = \log_b(e)\frac{u'}{u}$$

với u' là đạo hàm của u và $\log_b(e)$ là hằng số.

Lưu ý 1: Kết quả này có được từ bài *"Nguyên lý cơ bản để tính đạo hàm"*.

Lưu ý 2: Nếu ta chọn e làm cơ số thì đạo hàm của $\ln(u)$ (với u là hàm số theo x) được tính bằng công thức đơn giản hơn dưới đây:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u}$$

Lưu ý rằng $\log_e(e) = 1$.

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của $y = \log_2(6x)$.

Trả lời ví dụ 3

Ta sử dụng công thức sau để đơn giản hóa vấn đề:

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

Ta viết lại bài toán:

$$y = \log_2(6x) = \log_2(6) + \log_2(x)$$

Ta có $\log_2(6)$ là hằng số nên đạo hàm bằng 0.

Đạo hàm của phần thứ hai, sử dụng công thức sau:

$$\frac{dy}{dx} = \log_2(e)\frac{1}{x} = \frac{\log_2(e)}{x}$$

II. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM HÀM SỐ LOGARITHM

1. Ứng dụng cho ngành hàng không

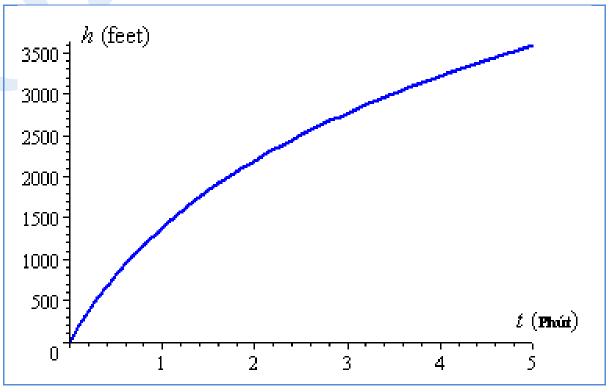
Ví dụ 4: Một máy bay Cessa cất cánh từ sân bay gần mặt nước biển có quỹ đạo theo hàm số:

$$h = 2000\ln(t+1)$$

với h tính theo feet và t theo phút. Tính tốc độ cất cánh tại thời điểm $t = 3$ phút.

Trả lời ví dụ 4

Đồ thị hàm số $h = 2000\ln(t+1)$ cho thấy đây là mô hình thực tế khi máy bay bay lên cao. Ở độ cao thấp, khi lượng không khí còn dày đặc thì tốc độ lên cao rất lớn. Nhưng khi máy bay càng bay lên cao, tốc độ lại giảm.



Để xác định tốc độ lên cao (vận tốc ngang), ta cần xác định đạo hàm bậc nhất:

$$\frac{d}{dt}(2000\ln(t+1)) = \frac{2000}{t+1}$$

Tại $t = 3$, ta được $v = \frac{2000}{4} = 500\ feet/$phút.

Lưu ý: Trong ngành hàng không, độ cao phía trên mực nước biển được tính theo đơn vị feet ($1\ feet\ = 0.304\,8\ m$), được xem là đơn vị đo chuẩn và được dùng phổ biến trong ngành khoa học hàng không và hàng hải.

2. Mức cường độ âm và decibel

Mức cường độ âm P của một nguồn âm cho trước được xác định bằng công thức:

$$P = 10 \log \left(\frac{W}{W_0} \right)$$

Đơn vị đo là decibel (dB).

W là cường độ âm, có đơn vị là watt.

W_0 là cường độ âm chuẩn mà tai người nghe được. Nó là một hằng số có giá trị $10^{-12}\ W/m^2$.

Cường độ âm có mối liên hệ đến cường độ của sóng âm. Logarithm được sử dụng để giải quyết các giá trị của mức cường độ âm lớn mà con người nghe được (từ tiếng gió nhẹ khoảng $20\ dB$ đến tiếng gầm rú của show diễn nhạc Rock vào khoảng $120\ dB$, phụ thuộc vào khoảng cách tới người nghe).

Ví dụ 5: Xác định tốc độ thay đổi của mức cường độ âm P theo thời gian nếu $W = 7.2$ và $\frac{dW}{dt} = 0.5$ tại một thời điểm t cho trước.

Trả lời ví dụ 5

Ta có $W_0 = 10^{-12}\ W/m^2$, sử dụng công thức logarithm cho phân số, ta được:

$$P = 10 \log \left(\frac{W}{10^{-12}} \right) = 10(\log(W) - \log(10^{-12}))$$

Sử dụng công thức đạo hàm logarithm, kết hợp $\log(10^{-12})$ là hằng số, ta được:

$$\frac{dP}{dt} = 10 \left(\left(\frac{1}{W} \log_{10}(e) \right) \frac{dW}{dt} - 0 \right) = 10 \left(\frac{1}{W} \log_{10}(e) \right) \frac{dW}{dt}$$

Thay thế các giá trị W và $\frac{dW}{dt}$ từ đề bài, ta được:

$$\frac{dP}{dt} = 10 \left(\frac{1}{7.2} \log_{10}(e) \right) 0.5 = 0.302\ dB/s$$

Đơn vị đo là dB/s vì mức cường độ âm thay đổi theo thời gian.

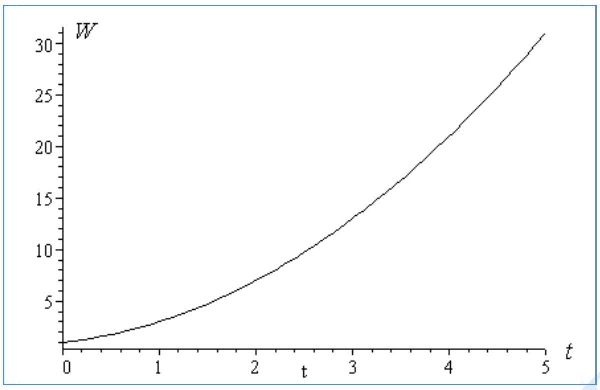
Ví dụ 6: Giả sử mức cường độ âm W xác định bằng biểu thức theo thời gian t (giây) sau:

$$W = t^2 + t + 1$$

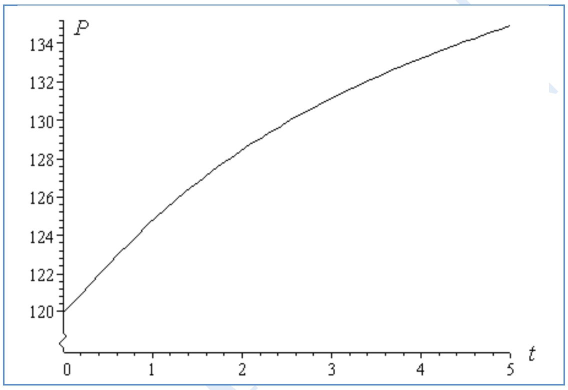
xác định tốc độ thay đổi của mức cường độ âm P tại thời điểm $t = 3s$.

Trả lời ví dụ 6

Đồ thị hàm số $W = t^2 + t + 1$ là một hình parabola đơn giản:



Đồ thị của mức cường độ âm $P = 10\log\left(\frac{t^2+t+1}{10^{-12}}\right)$.



Đạo hàm của P là:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= 10\left(\frac{1}{W}\log_{10}(e)\right)\frac{dW}{dt}\\ &= 10\left(\frac{1}{t^2+t+1}\log_{10}(e)\right)\frac{d(t^2+t+1)}{dt}\\ &= 4.343\frac{2t+1}{t^2+t+1}\end{aligned}$$

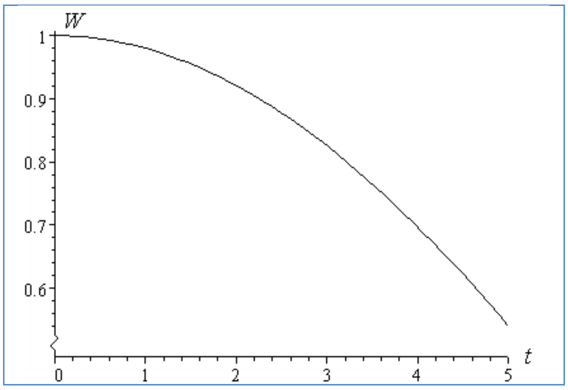
Tại $t = 3$, tốc độ thay đổi P theo thời gian là:

$$\frac{dP}{dt} = 4.343\frac{2t+1}{t^2+t+1}\bigg|_{t=3} = 2.339\ dB/s$$

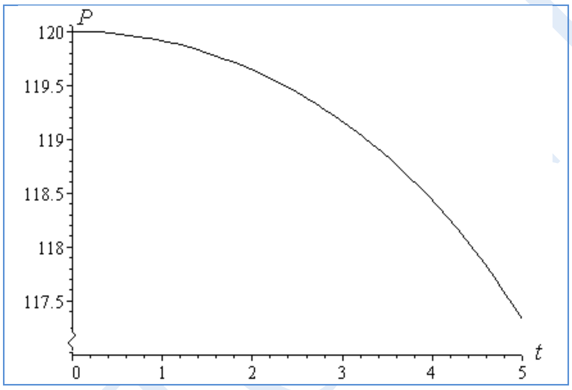
Ví dụ 7: Nếu $W = \cos(0.2t)$, xác định tốc độ thay đổi của mức cường độ âm P tại thời điểm $t = 1\ s$.

Trả lời ví dụ 7

Đồ thị $W = \cos(0.2t)$.



Đồ thị $P = 10\log\left(\frac{\cos(0.2t)}{10^{-12}}\right)$



Ta thấy rằng đồ dốc đồ thị là âm, vậy ta dự đoán đáp án sẽ có giá trị âm.

Ta có.

$$P = 10\log\left(\frac{\cos(0.2t)}{10^{-12}}\right)$$

Mặt khác:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dy}{dt} 10\log_{10}\left(\frac{\cos(0.2t)}{10^{-12}}\right)$$

$$= 10\left(\frac{1}{W}\log_{10}(e)\right)\frac{dW}{dt}$$

$$= 10\left(\frac{1}{\cos(0.2t)}\log_{10}(e)\right)(-0.2\sin(0.2t))$$

$$= -0.869\tan(0.2t)$$

Tại $t = 1s$, giá trị đạo hàm là $-0.176\ dB/s$.

Đáp án là âm, đúng như ta dự đoán.

Ví dụ 8: Bán kính cong tại 1 điểm trên đường cong được xác định bởi công thức:

Bán kính cong:

$$\Re = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

Một trục quay cơ học di chuyển theo đường đi sau:

$$y = \ln(\sec x)$$

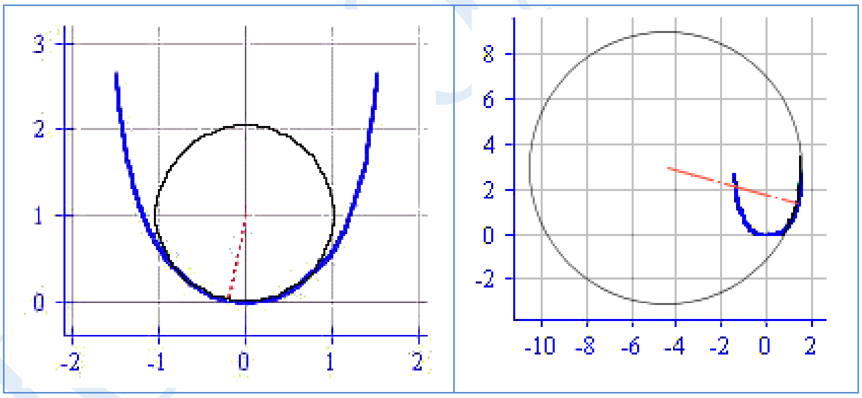
với $-1.5\ dm \le x \le 1.5\ dm$.

Tìm bán kính cong của đường đi này với $x = 0.85\ dm$.

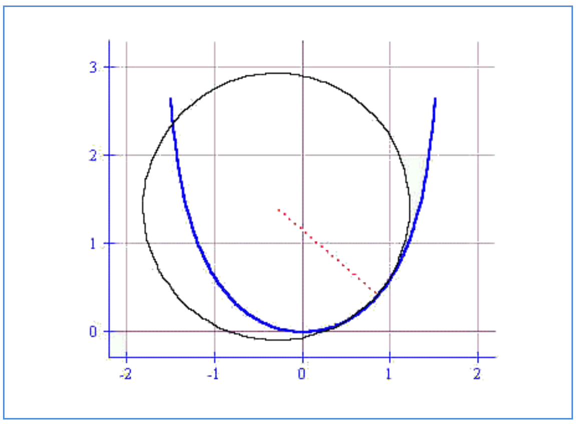
Trả lời ví dụ 8

Đường đi của trục quay được thể hiện bằng đường cong màu xanh. Tại điểm này ta có thể vẽ một đường tròn sát với đường cong. Ta sẽ tìm bán kính của đường tròn này.

Khi $x = -0.2$, bán kính cong là 0.9. Khi $x = 1.4$, bán kính cong là 5.8:



Khi $x = 0.85$, trong trường hợp này, bán kính cong bằng bao nhiêu?



$$y = \ln(\sec(x))$$

Vậy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec(x)\tan(x)}{\sec(x)} = \tan(x)$$

Khi $x = 0.85$, ta được kết quả là 1.138.

Và,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2(x)$$

Khi $x = 0.85$, ta được kết quả là 2.295 8.

Vậy ta được bán kính cong:

$$\Re = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} = \Re = \frac{(1 + 1.138^2)^{3/2}}{|2.2958|} = \frac{3.478\ 6}{2.295\ 8} = 1.52\ dm$$

III. ĐẠO HÀM HÀM SỐ MŨ

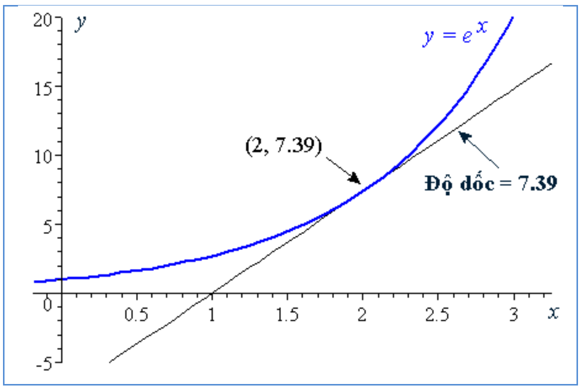
Đạo hàm của e^x có đôi chút đặc biệt, biểu thức đạo hàm của e^x lại ra chính nó, đó là e^x:

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

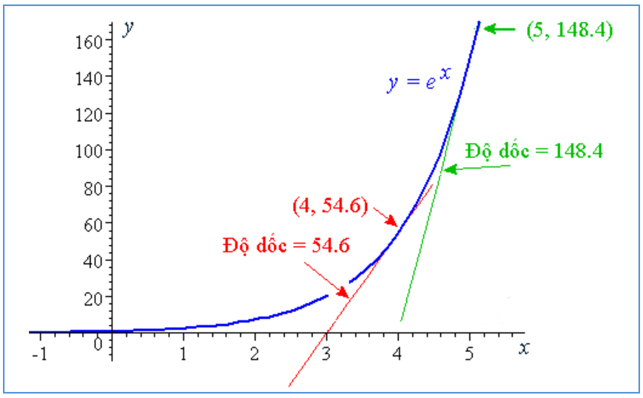
Điều này nghĩa là gì? Có nghĩa độ dốc bằng với giá trị hàm số (giá trị y) tại mọi điểm trên đồ thị.

Ví dụ: Khi $x = 2$, ta điểm này, giá trị y là $e^2 \approx 7.39$.

Vì đạo hàm của e^x là e^x độ dốc của tiếp tuyến tại $x = 2$ là $e^2 \approx 7.39$, ta có thể quan sát đồ thị dưới đây:



Ta xem đồ thị sau để hiểu rõ hơn việc độ dốc tại 1 điểm của đồ thị $y = e^x$ bằng đúng với giá trị $y = e^x$:



Ta thấy rằng tại $x = 4$, giá trị y là 54.6 và độ dốc tiếp tuyến (màu đỏ) cũng là 54.6.

Tại $x = 5$, giá trị $y = 148.4$, đó cũng là giá trị độ dốc tiếp tuyến (màu xanh).

1. Một số công thức khác của đạo hàm hàm mũ

Nếu u là một hàm theo x, ta có thể tính đạo hàm dưới dạng e^u:

$$\frac{d(e^u)}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

Nếu ta có hàm mũ theo cơ số b nào đó, ta có công thức đạo hàm sau:

$$\frac{d(b^u)}{dx} = b^u \ln(b) \frac{du}{dx}$$

Ví dụ 9: Tính đạo hàm của:

$$y = 10^{3x}$$

Trả lời ví dụ 9

$$y = 10^{3x}$$

Vì vậy:

$$\frac{dy}{dx} = 10^{3x} \cdot \ln(10) \cdot \frac{d(3x)}{dx} = 3\ln(10)\, 10^{3x}$$

Ví dụ 10: Tính đạo hàm của:

$$y = e^{\sin(x)}$$

Trả lời ví dụ 10

$$y = e^{\sin(x)}$$

Đặt $y = e^u$, với $u = \sin(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$
$$= e^u \frac{d(\sin(x))}{dx}$$
$$= e^{\sin(x)}\cos(x)$$

Ví dụ 11: Hãy cho thấy:

$$y = e^{-x}\sin(x)$$

thỏa phương trình:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Trả lời ví dụ 11

$$y = e^{-x}\sin(x)$$

Vì vậy:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}\cos(x) + \sin(x)\,(-e^{-x})$$
$$= e^{-x}(\cos(x) - \sin(x))$$

Và:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-x}(-\sin(x) - \cos(x)) + (\cos(x) - \sin(x))(-e^{-x})$$
$$= e^{-x}(-2\cos(x))$$

Vì vậy:

$$\text{Vế trái} = \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y$$
$$= e^{-x}(-2\cos(x)) + 2\big(e^{-x}(\cos(x) - \sin(x))\big) + 2(e^{-x}\sin(x))$$
$$= e^{-x}(-2\cos(x) + 2\cos(x) - 2\sin(x) + 2\sin(x))$$
$$= 0$$
$$= \text{Vế phải}$$

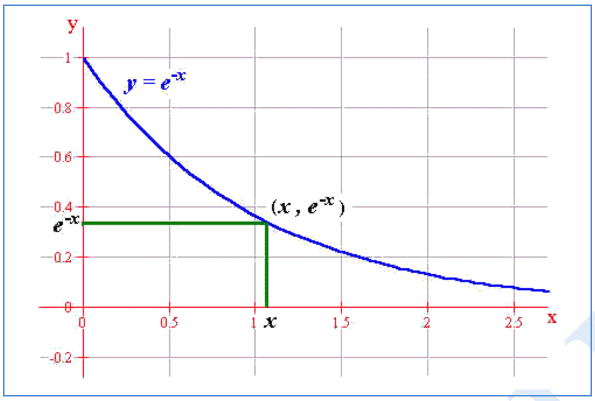
IV. ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ MŨ

Ví dụ 12: Một máy tính được lập trình để vẽ một chuỗi các hình chữ nhật ở góc phần tư thứ nhất của trục tọa độ 2 chiều, nội tiếp dưới đường cong.

$$y = e^{-x}$$

Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật lớn nhất có thể nội tiếp được?

Trả lời ví dụ 12



Diện tích hình chữ nhật tại điểm x là:

$$A = xe^{-x}$$

Giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) xảy ra khi:

$$\frac{dA}{dx} = 0$$

Bây giờ:

$$\frac{dA}{dx} = (x)(-e^{-x}) + (e^{-x})(1)$$
$$= e^{-x}(1 - x)$$

Biểu thức này bằng 0 khi $x = 1$, và dương khi $x < 1$, âm khi $x > 1$, vì vậy ta có giá trị lớn nhất.

Vậy diện tích lớn nhất là $(1)(e^{-1}) = 0.3679$ đơn vị^2.

CHƯƠNG 3: TÍCH PHÂN

PHẦN 3.1: TÍCH PHÂN

BÀI 3.1.1: MỞ ĐẦU

Tại sao ta phải cần nghiên cứu tích phân?

Ta đã biết sự tương quan gồm cả tốc độ thay đổi giữa 2 biến, nhưng ta cũng cần biết mối quan hệ trực tiếp giữa 2 biến.

Ví dụ: Ta biết vận tốc chuyển động của một vật thể trong thời khắc nào đó, nhưng đồng thời ta cũng muốn biết trong thời khắc đó, vật thể ấy đang ở chỗ nào?

Để tìm mối quan hệ trực tiếp này, ta cần có một phép thực hiện ngược lại phép vi phân. Phép này gọi là phép tính tích phân.

Phép tính tích phân được ứng dụng rất nhiều.

Tháp đôi Petronas ở Kuala Lumpur chịu sự tác động rất lớn của gió cao. Tích phân được sử dụng để tính toán sức chịu đựng của tháp.

Tháp đôi Petronas. ở Kuala Lumpur

Nhà hát Opera Sydney được thiết kế độc đáo theo mặt cắt của quả bóng. Để thiết kế, người ta phải sử dụng nhiều phương trình vi phân (một dạng của phép tích phân).

Nhà hát Opera Sydney

Về phương diện lịch sử, một trong những ứng dụng của tích phân đó là tính thể tích thùng rượu (có bề mặt cong). Ta sẽ nghiên cứu cách tìm thể tích ở những phần sau.

Thùng rượu

Có thể kể đến một số ứng dụng khác của tích phân như tìm diện tích dưới bề mặt cong, trọng tâm, quãng đường và vận tốc, dòng chảy chất lỏng, mô hình hóa trạng thái vật thể, ….

Trong phần 2.1 này:

+ Bài 3.1.1 **Mở đầu**.

+ Bài 3.1.2 **Vi phân.**

+ Bài 3.1.3 **Tích phân bất định:** Hướng dẫn cách tìm tích phân đơn giản.

+ Bài 3.1.4 **Diện tích dưới đường cong:** Cách dùng tích phân để tính diện tích dưới đường cong.

+ Bài 3.1.5 **Tích phân xác định:** Công thức thay thế và cách sử dụng.

+ Bài 3.1.6 **Quy tắc hình thang:** Tính toán giá trị tích phân khi ta không thể tìm ra biểu thức.

+ Bài 3.1.7 **Quy tắc Simpson:** Công thức tốt hơn để tính toán giá trị tích phân.

Ta bắt đầu nghiên cứu về vi phân vì nó bao hàm một số khái niệm và ký hiệu mà ta sẽ gặp trong khi nghiên cứu tích phân.

BÀI 3.1.2 VI PHÂN

Trong chương "*Vi phân*", ta viết $\frac{dy}{dx}$ và $f'(x)$ đều cùng một ý nghĩa. Ta dùng ký hiệu $\frac{d}{dx}$ như là toán tử.

Bây giờ ta sẽ thấy có nhiều cách khác nhau để viết cũng như nghĩ về vi phân.

Ta dùng ký hiệu đạo hàm mới này trong suốt chương tích phân.

I. ĐỊNH NGHĨA

Vi phân là một giá trị nhỏ, nhỏ rất nhiều, vô cùng nhỏ. Ta thường viết vi phân bằng các ký hiệu như dx; dy; dt; ... với:

+ dx là sự thay đổi giá trị rất ít của biến x.

+ dy là sự thay đổi giá trị rất ít của biến y.

+ dt là sự thay đổi giá trị rất ít của biến t.

+ Khi so sánh 2 đại lượng có giá trị vô cùng nhỏ có mối quan hệ với nhau, như y là một hàm f nào đó của biến x, ta nói vi phân dy, với $y = f(x)$ được viết là:

$$dy = f'(x)\,dx$$

Lưu ý: Ta xem $\frac{dy}{dx}$ như là một phân số (tức ta có quyền tác động vào tử, mẫu một cách độc lập) hơn là một toán tử.

Ví dụ 1: Tính vi phân dy của hàm số:

$$y = 3x^5 - x$$

Trả lời ví dụ 1

Ta có $y = 3x^5 - x$ nên $f'(x) = 15x^4 - 1$.

Vậy ta có kết quả vi phân:

$$dy = f'(x)\,dx$$
$$= 15x^4 - 1\,dx$$

Đê tìm vi phân dy, ta chỉ việc tìm đạo hàm và gắn thêm đuôi dx vào.

Ví dụ 2: Tìm vi phân dy của hàm số $y = 5x^2 - 4x + 2$.

Trả lời ví dụ 2

Vì $y = 5x^2 - 4x + 2$ nên $f'(x) = 10x - 4$.

Vậy kết quả vi phân là:

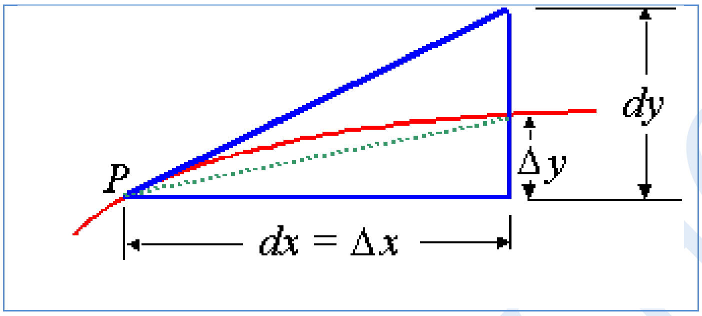
$$dy = 10x - 4\,dx$$

Lưu ý: Rất nhiều sách đã đề cập đến việc ta có thể sử dụng vi phân để ước lượng giá trị thực của hàm số (Δx) thay đổi dựa trên sự thay đổi nhỏ của x (viết là Δx). Điều này hơi ngớ ngẩn vì ta dễ dàng tìm được sự thay đổi chính xác, không cần phải tính ước lượng.

Ở đây ta giới thiệu vi phân cũng như giới thiệu ký hiệu sẽ sử dụng trong tích phân.

II. GIỮA dy; dx; Δy; Δx CÓ MỐI QUAN HỆ NHƯ THẾ NÀO?

Δy có nghĩa là sự thay đổi của biến y, Δx có nghĩa là sự thay đổi của biến x.



Khi Δx ngày càng nhỏ, tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ngày gần với tỉ số "tức thời" $\frac{dy}{dx}$. Điều đó có nghĩa:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Nếu bạn đọc chưa hiểu, có thể xem lại bài "*Độ dốc của tiếp tuyến với đường cong (tính toán giá trị)*".

Bây giờ ta sẽ xem cách thức vi phân được dùng để biểu diễn quy trình ngược lại của phép lấy đạo hàm, quy trình này còn gọi là phép lấy tích phân.

BÀI 3.1.3 NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

Ta muốn biểu diễn quy trình ngược lại của phép lấy đạo hàm, ta gọi quy trình đó là phép lấy tích phân. Trong bài này, ta sẽ gọi quy trình đó với tên gọi là nguyên hàm (cũng là 1 dạng của tích phân, là tích phân bất định).

Ví dụ 1: Nếu ta biết rằng:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

và ta muốn biết hàm số nào đã đạo hàm ra được hàm số này, ta sẽ "hoàn tác" quy trình lấy đạo hàm (có thể nghĩ: "Để muốn có kết quả này, ta cần đạo hàm hàm số nào?").

$y = x^3$ là một nguyên hàm của $\frac{dy}{dx} = 3x^2$. Ngoài ra ta còn vô số nguyên hàm khác, chẳng hạn như:

$$y = x^3 + 4$$
$$y = x^3 + \pi$$
$$y = x^3 + 27.3$$

Tổng quát, ta nói $y = x^3 + K$ là tích phân bất định (hay nguyên hàm) của $3x^2$. Con số K được gọi là hằng số tích phân.

Lưu ý: Nhiều sách toán dùng ký hiệu hằng số tích phân là C, nhưng với những câu hỏi bao hàm về kỹ thuật điện, ta thường dùng "$+K$", vì C trùng với ký hiệu của điện dung.

I. KÝ HIỆU CỦA TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

Ta viết: $\int 3x^2\,dx = x^3 + K$ và nói thành lời: "Tích phân của $3x^2$ theo biến x bằng $x^3 + K$".

1) Dấu tích phân

Ký hiệu $\int$ hình thành bởi sự kéo dài ký tự "S" viết tắt của chữ "sum" (tổng) (Người Đức, Anh thời xưa viết chữ "S" giống với ký hiệu tích phân bây giờ). Những bài sau ta sẽ thấy tích phân thực ra là tổng của nhiều hình vuông có diện tích vô cùng nhỏ.

$\sum$ là ký hiệu của "tổng". Nó được dùng cho tổng hữu hạn hay vô hạn.

$\int$ là ký hiệu của tổng hữu hạn các diện tích vô cùng nhỏ (hoặc các biến vô cùng nhỏ khác).

Ký hiệu chữ "S" dài này được Lebniz giới thiệu khi ông phát triển một số khái niệm của tích phân.

2) Một số ký hiệu khác của tích phân

Lưu ý: Đôi khi ta viết chữ in để biểu thị tích phân.

Ví dụ: ta viết $F(x)$ ý nghĩa là tích phân của $f(x)$. Vì vậy ta có:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

Ví dụ 2: Tìm:

$$\int x^2 - 5\,dx$$

Trả lời ví dụ 2

Nguyên hàm của x^2 là $\frac{x^3}{3}$ và nguyên hàm của 5 là $5x$, vậy ta có thể viết:

$$\int x^2 - 5\,dx = \frac{x^3}{3} - 5x + K$$

Bây giờ ta sẽ học một số công thức tổng quát cho tích phân:

3) Tích phân hằng số

$$\int k\,dx = kx + K$$

(k và K là các hằng số).

Ví dụ 3: Tìm:

$$\int 4\,dx$$

Trả lời ví dụ 3

Sử dụng công thức trên, ta có thể viết đơn giản:

$$\int 4\,dx = 4x + K$$

Luôn luôn kiểm tra kết quả bằng cách lấy đạo hàm câu trả lời và đối chiếu xem có khớp với hàm số được lấy tích phân hay không.

4) Tích phân lũy thừa của x

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K$$

Công thức này đúng khi $n \neq -1$.

Khi tích phân lũy thừa của x, ta thêm 1 vào lũy thừa và chia biến lũy thừa mới cho giá trị lũy thừa mới.

Ví dụ 4: Tính tích phân:

$$\int x^5\,dx$$

Trả lời ví dụ 4

Sử dụng công thức trên, ta được:

$$\int x^5\,dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + K = \frac{x^6}{6} + K$$

II. HẰNG SỐ TÍCH PHÂN

Đừng quên "$+K$" (hay "$+C$"). Hằng số tích phân này rất quan trọng trong một số ứng dụng của tích phân bất định.

Ví dụ 5: Tính tích phân:

$$\int 8x^6\,dx$$

Trả lời ví dụ 5

$$\int 8x^6\,dx$$

8 là hằng số nên ta có thể lấy nó ra ngoài dấu tích phân:

$$8\int x^6\,dx$$

Tiếp theo, ta tính tích phân bằng công thức trình bày ở mục B, ta được kết quả:

$$8\int x^6\,dx = \frac{8x^7}{7} + K$$

Ví dụ 6: Tính tích phân:

$$dy = 5x^2 - 4x + 3\,dx$$

Trả lời ví dụ 6

$$dy = 5x^2 - 4x + 3\,dx$$

Đây là dạng vi phân nên ta chỉ việc thêm dấu tích phân vào phía trước:

$$\int dy = \int 5x^2 - 4x + 3\,dx$$

Ở vế trái, ta được:

$$\int dy = \int 1\,dy = y$$

(ta tích phân hằng số 1 theo y).

Ở vế phải, ta tích phân từng phần tử:

$$\int 5x^2 - 4x + 3\,dx$$

$$= \frac{5x^3}{3} - 4\left(\frac{x^2}{2}\right) + 3x + K$$

$$= \frac{5x^3}{3} - 2x^2 + 3x + K$$

Ghép 2 vế lại, ta có kết quả:

$$y = \frac{5x^3}{3} - 2x^2 + 3x + K$$

Ví dụ 7:

$$\int 3x^2 + \sqrt{x} - \frac{5}{x^3}\, dx$$

Trả lời ví dụ 7

Để giải phương trình này, đầu tiên ta cần viết lại lũy thừa các biến:

$$\int 3x^2 + \sqrt{x} - \frac{5}{x^3}\, dx$$

$$= \int 3x^2 + x^{1/2} - 5x^{-3}\, dx$$

$$= x^3 + \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - 5\frac{x^{-2}}{-2} + K$$

$$= x^3 + \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{5}{2}x^{-2} + K$$

Ví dụ 8: Một đường cong khi đạo hàm chính nó, ta được kết quả $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x$. Biết rằng đường cong đi qua điểm $(2; 5)$. Tìm phương trình đường cong ấy.

Trả lời ví dụ 8

Để tìm phương trình, đầu tiên ta cần tính tích phân kết quả đạo hàm, khi đó ta sẽ được biểu thức theo y:

$$\int 3x^2 - 2x\, dx = x^3 - x^2 + K$$

Vậy ta được $y = x^3 - x^2 + K$.

Biểu thức này đại diện một họ các đường cong, phụ thuộc vào hằng số K ứng với trục Oy.

Ta sẽ tìm giá trị K từ dữ kiện đề bài đã cho. Vì đường cong đi qua điểm $(2; 5)$, ta thay vào phương trình:

$$y = x^3 - x^2 + K$$

Ta được kết quả:

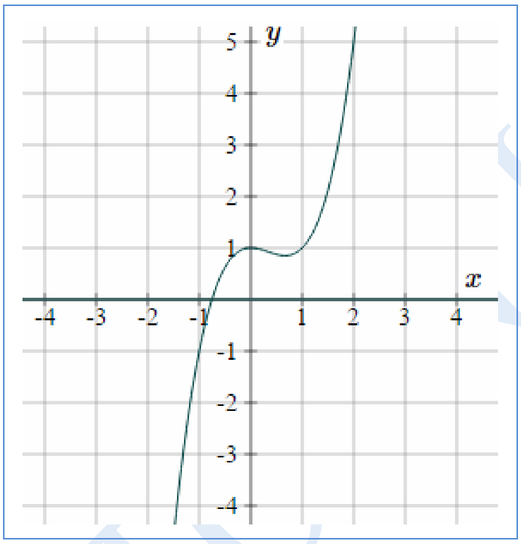
$$5 = (2)^3 - (2)^2 + K$$
$$\Leftrightarrow 5 = 8 - 4 + K$$

Vậy $K = 1$.

Vậy phương trình đường cong cần tìm là:

$$y = x^3 - x^2 + 1$$

Đây là đồ thị đường cong:



Hãy nhớ là đồ thị đi qua điểm $(2; 5)$.

Ví dụ 8: Tính tích phân sau:

$$\int (2x^4 - 5)^6 x^3\, dx$$

Tích phân này hoàn toàn khác so với những tích phân trước đó.

Biểu thức ta cần tính tích phân bao hàm $(2x^4 - 5)^6$, là một hàm số trong hàm số, và ta có thêm x^3 ở khúc cuối. Ta không thể tính tích phân bằng những cách thức mà nãy giờ ta làm.

Trong trường hợp này, ta sẽ làm quy trình ngược lại của "Quy tắc xích" mà ta đã gặp trong chương "*Vi phân (tìm đạo hàm)*". Ta sẽ gặp gỡ công thức mới để tính tích phân trong những trường hợp như trên.

Công thức lũy thừa cho tích phân:

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + K$$

(công thức này đúng khi $n \neq 1$).

Điều này đòi hỏi bước đặt ẩn phụ, khi $u(x)$ là hàm số nào đó theo x.

Bây giờ, ta quay lại bài toán để xem ta áp dụng công thức này như thế nào.

Tính tích phân:

$$\int (2x^4 - 5)^6 \, x^3 \, dx$$

Trả lời ví dụ 8

Ta đặt ẩn phụ:

$$u = 2x^4 - 5$$

Vì sao ta đặt vậy? Vì $2x^4 - 5$ là biểu thức trong ngoặc ở đề bài.

Bây giờ ta vi phân u, được:

$$du = 8x^3 \, dx$$

Ở đề bài ta có $1x^3 \, dx$ nên ta biến đổi phương trình trên bằng cách chia hai vế cho 8.

$$\frac{1}{8} du = x^3 \, dx$$

Bây giờ vế phải giống như một phần trong đề bài, đó là $x^3 \, dx$.

Ta viết lại phương trình đề bài:

$$\int (2x^4 - 5)^6 x^3 \, dx = \frac{1}{8} \int u^6 \, du$$

Ta tính tích phân theo biến u:

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{u^7}{7} + K = \frac{u^7}{56} + K$$

Cuối cùng, ta trả lại biến x vì đó là biến mà ta bắt đầu:

$$= \frac{(2x^4 - 5)^7}{56} + K$$

Thêm ví dụ về đặt ẩn phụ:

Ví dụ 9:

$$\int (x^3 - 2)^6 (3x^2) \, dx \, .$$

Trả lời ví dụ 9

Đặt $u = x^3 - 2$.

Khi đó $du = 3x^2\,dx$.

Lúc này, ta có thể viết:

$$\int (x^3 - 2)^6 (3x^2)\,dx$$

$$= \int u^6\,du$$

$$= \frac{u^7}{7} + K$$

$$= \frac{(x^3 - 2)^7}{7} + K$$

Ví dụ 10: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ, tính:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}\,dx$$

Trả lời ví dụ 10

Đặt $u = x^2 - 9$.

Khi đó $du = 2x\,dx$.

Đề bài chỉ có $x\,dx$ nên ta chia hai vế của phương trình trên cho 2, ta được:

$$\frac{du}{2} = x\,dx$$

Bây giờ:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{-1/2}\,du$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + K$$

$$= u^{1/2} + K$$

$$= \sqrt{x^2 - 9} + K$$

Ví dụ 11: Biết rằng $y' = \sqrt{2x + 1}$, tìm hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $(0; 2)$.

Trả lời ví dụ 11

Lưu ý: y' có nghĩa là đạo hàm của y, tức $\frac{dy}{dx}$.

$$y' = \sqrt{2x+1}$$

Vậy,

$$y = \int \sqrt{2x+1}\, dx$$

Phương trình này đòi hỏi ta cần tính tích phân, sau đó tìm hằng số tích phân.

Đặt $u = 2x + 1$, ta được $du = 2\, dx$.

Vậy:

$$\frac{1}{2} du = dx$$

Vậy:

$$\begin{aligned} y &= \int \sqrt{2x+1}\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int u^{1/2}\, du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{3/2} + K \\ &= \frac{1}{3} \cdot (2x+1)^{3/2} + K \end{aligned}$$

Với $x = 0$ thì $y = 2$ (giả thiết).

$$2 = \frac{1^{3/2}}{3} + K$$
$$\Leftrightarrow K = \frac{5}{3}$$

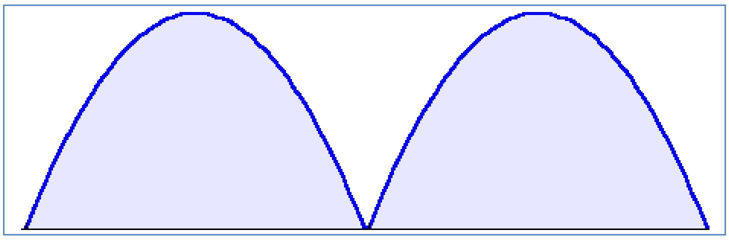
Vậy:

$$y = \frac{(2x+1)^{3/2}}{3} + \frac{5}{3}$$

là phương trình cần tìm.

BÀI 3.1.4 DIỆN TÍCH DƯỚI ĐƯỜNG CONG

Một tòa nhà có cổng vòm hình parabola và ta cần lắp gương để đóng cổng. Hỏi ta phải cần bao nhiêu gương là đủ?



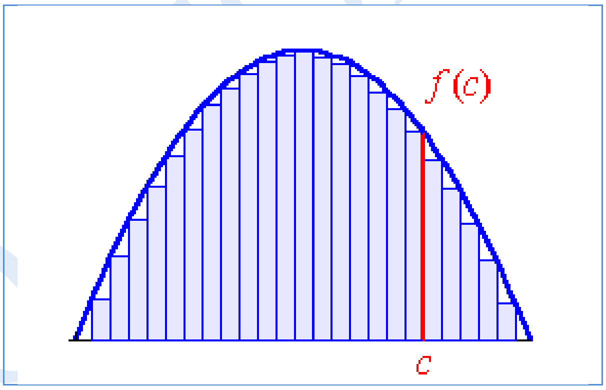
Ta cần biết đến diện tích dưới đường cong.

Ta sẽ tính diện tích bằng 2 cách sau:

+ Sử dụng giá trị xấp xỉ (tìm diện tích những hình chữ nhật).

+ Sử dụng tích phân.

Trước khi phép tích phân được phát triển, để tính diện tích, người ta phải dùng phép xấp xỉ để đưa ra giá trị diện tích tương đối bằng cách chia hình ban đầu thành nhiều hình chữ nhật nhỏ, sau đó cộng hết diện tích hình chữ nhật nhỏ này lại, ta sẽ được giá trị tương đối diện tích hình ban đầu.



Độ cao của mỗi hình chữ nhật được xác định bằng một giá trị hàm số, ví dụ như hình trên, với vị trí $x = c$, ta được độ cao hình chữ nhật tương ứng là $f(c)$. Càng có nhiều hình chữ nhật, giá trị diện tích hình ban đầu càng chính xác.

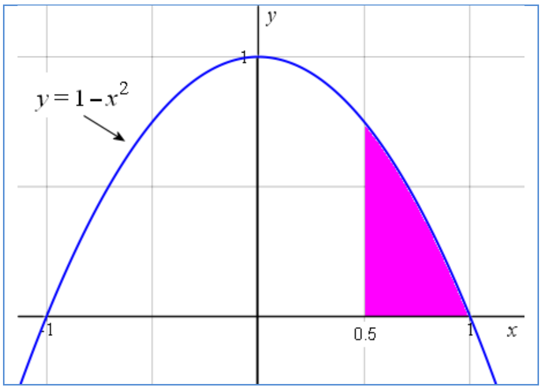
Ở hình trên, ta xấp xỉ hình parabola bằng những hình chữ nhật trong (mỗi hình chữ nhật nằm bên trong hình parabola). Ta cũng có thể sử dụng hình chữ nhật ngoài để tính diện tích của hình. Cách làm này đã xuất hiện từ thời Hy Lạp cổ đại.

Ví dụ 1: Sử dụng những hình chữ nhật để tính xấp xỉ.

Tìm diện tích dưới đường cong $y = 1 - x^2$ giữa $x = 0.5$ và $x = 1$, với $n = 5$, sử dụng công thức tổng các diện tích hình chữ nhật.

Trả lời ví dụ 1

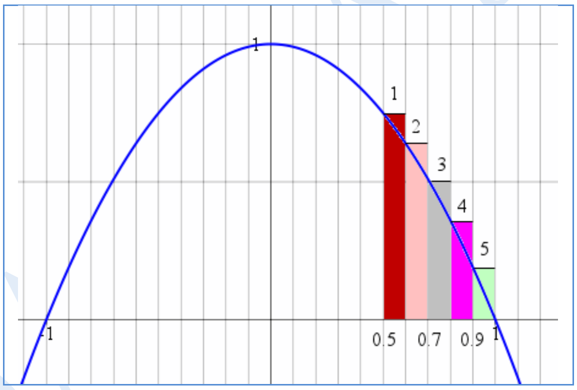
Diện tích ta cần tìm được tô màu hồng đậm trong hình dưới đây:



Vì $n = 5$, chiều rộng của mỗi hình chữ nhật là:

$$h = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0.5}{5} = 0.1.$$

Ta sẽ tính tổng diện tích của 5 hình chữ nhật sau:



Chiều cao của mỗi hình chữ nhật xác định bằng giá trị hàm số ứng với giá trị x tương ứng.

Ví dụ, vì $y = f(x) = 1 - x^2$, chiều cao hình chữ nhật đầu tiên là:

$$f(0.5) = 1 - (0.5)^2 = 0.75$$

Từ đó ta được:

$$\text{Diện tích}_1 = 0.75 \cdot 0.1 = 0.075$$

Chiều cao hình chữ nhật thứ hai:

$$f(0.6) = 1 - (0.6)^2 = 0.64$$

Chiều cao hình chữ nhật thứ năm:

$$f(0.9) = 1 - (0.9)^2 = 0.19$$

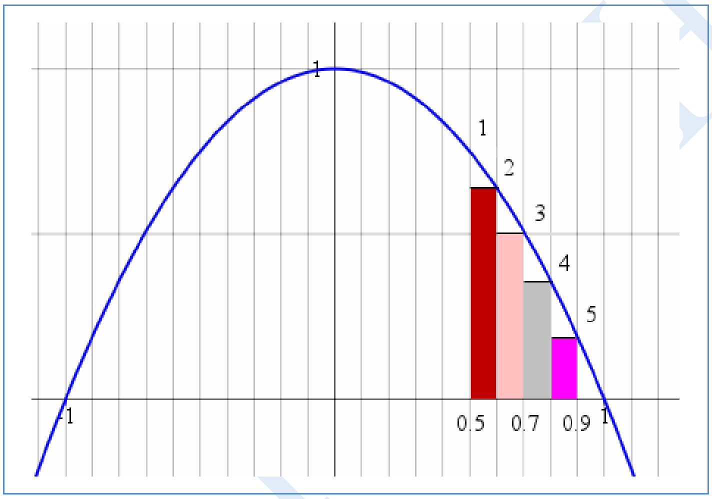
Cộng lại diện tích cả 5 hình chữ nhật, ta được (ta sử dụng ký hiệu "tổng", ý nghĩa là tổng 5 hình chữ nhật. Đồng thời, ta cộng hết chiều cao các hình chữ nhật, sau đó nhân cho chiều rộng vì chiều rộng mỗi hình chữ nhật đều bằng nhau):

$$A = \sum_{i=1}^{5} \text{Diện tích}_i = (0.75 + 0.64 + 0.51 + 0.36 + 0.19) \times (0.1)$$

$$= 2.45 \times 0.1$$

$$= 0.245$$

Ở cách làm trên, ta đã tìm diện tích bằng cách sử dụng hình chữ nhật "ngoài". Để tìm giá trị xấp xỉ tốt hơn, ta có thể tính diện tích của hình chữ nhật "trong", sau đó tính trung bình 2 kết quả. Đồ thị tính diện tích hình chữ nhật "trong" như sau:



Và đây là tổng diện tích các hình chữ nhật trong (hình chữ nhật thứ 5 có độ cao bằng 0 nên có diện tích bằng 0):

$$A = \sum_{i=1}^{5} \text{Diện tích}_i = (0.64 + 0.51 + 0.36 + 0.19 + 0) \times (0.1)$$

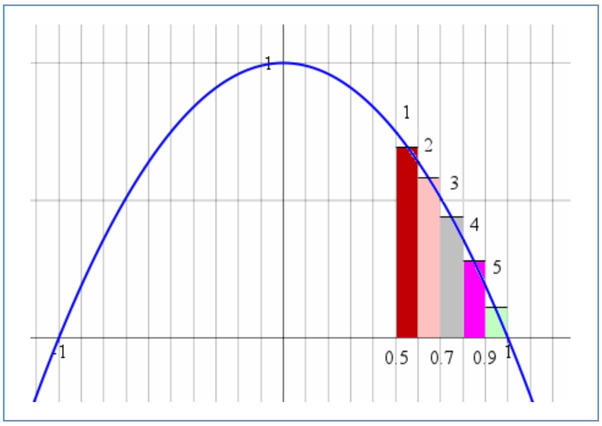
$$= 1.7 \times 0.1$$

$$= 0.17$$

Giá trị trung bình của 2 kết quả là:

$$\frac{0.245 + 0.17}{2} = 0.2075$$

Cách thứ 3 để tìm diện tích đó là xác định điểm giữa mỗi cạnh hình chữ nhật. Đồ thị của cách này là:



Lúc này diện tích ta thu được là:

$$(0.6975 + 0.5575 + 0.4375 + 0.2275 + 0.0975) \cdot 0.1 = 0.20875$$

(Giá trị đầu tiên đến từ $f(0.55) = 1 - (0.55)^2 = 0.6975$).

Đáp án này lớn hơn một tí so với đáp án trung bình, và kém chính xác hơn!

Tính diện tích theo hình ở câu a), nhưng lần này $n = 10$, sử dụng cách thức tổng các hình chữ nhật.

Trả lời

Vì $n = 10$,

$$h = \Delta x = \frac{1 - 0.5}{10} = 0.05$$

Ta sử dụng hình chữ nhật ngoài (10 hình) để tìm diện tích như sau:

$$A = \sum_{i=1}^{10} \text{Diện tích}_i$$

$$= (0.6975 + 0.64 + 0.19 + \cdots + 0.9755 + 0) \times (0.05)$$

$$= 3.7875 \times 0.05$$

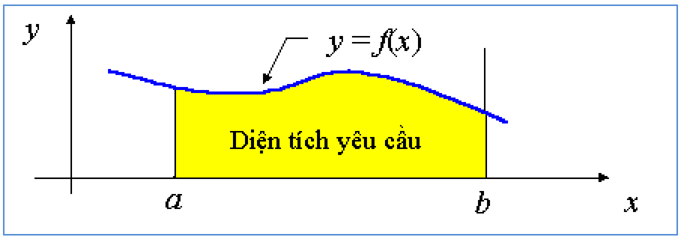
$$= 0.189\ 375$$

Để hiểu rõ thêm về cách thức tính tổng diện tích hình chữ nhật (hay còn được gọi với tên "**tổng Riemann**"), bạn có thể truy cập vào trang: *http://www.intmath.com/integration/riemann-sums.php* để thực hiện nhiều phép chia nhỏ ứng với giá trị n tùy ý.

I. TÍNH DIỆN TÍCH BẰNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Phải có một cách nào đó tính diện tích chính xác hơn cách dùng các hình chữ nhật! Tích phân được phát triển bởi Newton và Leibniz dựa trên ý tưởng "cộng diện tích các hình chữ nhật" này.

Tổng quát:



Lưu ý: Đường cong hoàn toàn nằm trên trục x.

Theo quy trình Δ, ta có thể chứng minh được tổng quát, diện tích chính xác dưới đường cong $y = f(x)$ từ $x = a$ đến $x = b$ xác định bởi tích phân xác định:

$$\text{Diện tích} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Làm thế nào để ta tính toán được biểu thức này?

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, thì:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Điều đó có nghĩa là:

Để tính tích phân xác định, ta làm các bước sau:

+ Nguyên hàm hàm số đã cho (không kèm theo hằng số K).

+ Thay cận trên b vào nguyên hàm, ta được giá trị 1.

+ Thay cận dưới a vào nguyên hàm, ta được giá trị 2.

+ Lấy giá trị 1 trừ giá trị 2.

Câu trả lời sẽ là một con số.

Đây là một phần của *"Những định lý cơ bản của vi tích phân"*.

Ví dụ 2: Tính tích phân xác định:

$$\int_1^{10} 3x^2\,dx$$

Trả lời ví dụ 2

$$\int_1^{10} 3x^2\,dx = 3\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^{10}, \qquad \text{(Tính nguyên hàm)}$$

$= x^3|_1^{10}$

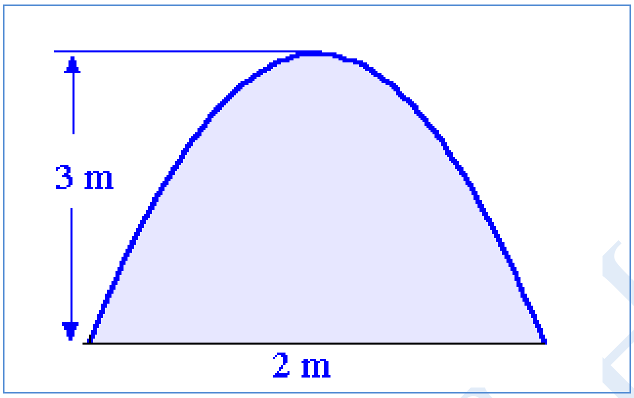
$= 10^3 - 1^3$ (Thay cận trên và cận dưới vào tích phân và trừ nhau)

$= 1\,000 - 1$

$= 999$

Ví dụ 3: Bài toán cổng vòm.

Quay lại bài toán cổng vòm mà ta đã đề cập ở đầu bài:



Nếu cổng vòm rộng $2m$ ở đáy và cao $3m$.

Tìm phương trình parabola.

Tìm diện tích dưới vòm bằng tích phân.

Trả lời ví dụ 2

Ta đặt parabola sao cho đỉnh bên trái trùng với tâm tọa độ $O(0;0)$, khi đó đỉnh bên phải sẽ đi qua điểm $(2;0)$ do độ rộng của cung vòm là $2m$. Đỉnh cao nhất của cung vòm là điểm $(1;3)$.

Công thức tổng quát của parabola: $y = ax^2 + bx + c$.

Với $x = 0$ thì $y = 0$, thay vào công thức trên, ta được $0 = 0 + 0 + c$, vậy $c = 0$.

Với $x = 1$ thì $y = 3$, thay vào công thức trên, ta được $3 = a + b$.

Với $x = 2$ thì $y = 0$, thay vào công thức trên, ta được $0 = 4a + 2b$.

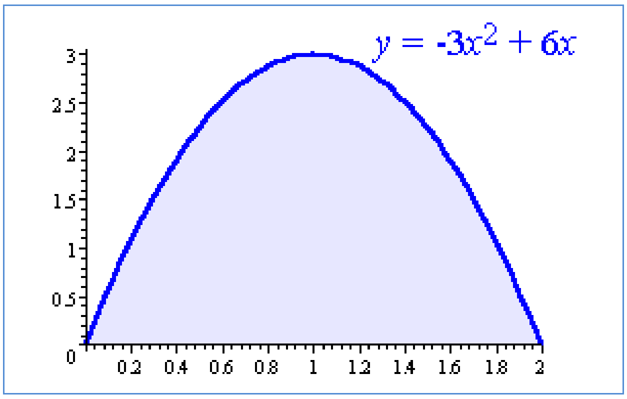
Vậy ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 6 \end{cases}$$

Vậy phương trình parabola cần tìm là:

$$y = -3x^2 + 6x$$

(với x tính theo metre).



Quy trình tìm phương trình parabola còn được gọi là mô hình hóa. Đây là kỹ năng rất quan trọng trong khoa học kỹ thuật.

Bây giờ ta tính diện tích:

$$\int_0^2 (-3x^2 + 6x)\,dx$$

$$= -x^3 + 3x^2|_0^2$$

$$= (-(2)^3 + 3(2)^2) - (0 + 0)$$

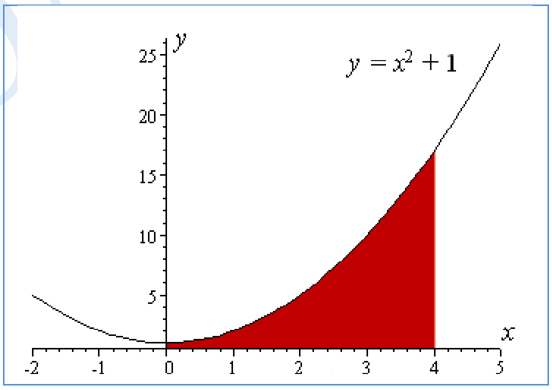
$$= (-8 + 12)$$

$$= 4\ m^2$$

Ví dụ 4: Tính chính xác diện tích dưới đường cong $y = x^2 + 1$, giữa $x = 0$ và $x = 4$ và trục x.

Trả lời ví dụ 4

Đây là diện tích mà ta cần tìm:



Tính diện tích:

$$\int_0^4 (x^2 + 1)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + x\Big|_0^4$$

$$= \left(\frac{4^3}{3} + 4\right) - \left(\frac{0^3}{3} + 0\right)$$

$$= \frac{76}{3} \text{ đơn vị}^2$$

$$\approx 25.3 \text{ đơn vị}^2$$

BÀI 3.1.5 TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Ở bài trước, ta đã sử dụng công thức:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

để tính diện tích dưới đường cong.

$F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$.

$F(b)$ là giá trị nguyên hàm ứng với cận trên $x = b$.

$F(a)$ là giá trị nguyên hàm ứng với cận dưới $x = a$.

Biểu thức này gọi là tích phân xác định.

Lưu ý: biểu thức không kèm theo hằng số tích phân và sau khi tích toán biểu thức, ta được một giá trị xác định.

Ta sẽ sử dụng tích phân xác định để giải quyết nhiều vấn đề thiết thực. Đầu tiên, ta sẽ tính toán một vài bài tích phân xác định.

Ví dụ 1: Tính:

$$\int_1^5 3x^2 + 4x + 1\,dx$$

Trả lời ví dụ 1

Để trả lời, ta làm các bước sau:

Tìm nguyên hàm, sau đó viết cận trên, cận dưới như sau:

$$(x^3 + 2x^2 + x)|_1^5$$

Ta viết cận trên và dưới như vậy để nhớ rằng ta sẽ thay chúng vào tích phân.

Tiếp theo, thay 5 (cận trên) vào tích phân:

$$(5)^3 + 2(5)^2 + 5 = 180$$

Sau đó thay 1 vào tích phân:

$$(1)^3 + 2(1)^2 + 1 = 4$$

Lấy kết quả trên trừ cho kết quả dưới, ta được câu trả lời:

$$180 - 4 = 176$$

Thông thường, ta sẽ trình bày cách tính như sau:

$$\int_1^5 3x^2 + 4x + 1\,dx$$
$$= (x^3 + 2x^2 + x)\big|_1^5$$
$$= ((5)^3 + 2(5)^2 + 5) - ((1)^3 + 2(1)^2 + 1)$$
$$= 180 - 4$$
$$= 176$$

Lưu ý rằng đáp án cuối cùng là một con số và không tính thêm hằng số tích phân "+K" vì đây là tích phân xác định.

Ví dụ 2: Tính:

$$\int_4^9 2x + 3\sqrt{x}\,dx$$

Trả lời ví dụ 2

Các bước thực hiện:

+ Tìm nguyên hàm.

+ Thay 9 vào nguyên hàm.

+ Thay 4 vào nguyên hàm.

+ Lấy kết quả trên trừ cho kết quả dưới.

$$\int_4^9 2x + 3\sqrt{x}\,dx$$
$$= \left(x^2 + 2x^{3/2}\right)\Big|_4^9$$
$$= \left((9)^2 + 2(9)^{3/2}\right) - \left((4)^2 + 2(4)^{3/2}\right)$$
$$= 135 - 32$$
$$= 103$$

I. ĐẶT ẨN PHỤ TRONG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Nhắc lại công thức lũy thừa của tích phân:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + K, \qquad (\text{với } n \neq 1)$$

Khi ta dùng ẩn phụ, tức ta đã thay đổi biến nên ta không thể dùng cận trên và cận dưới của biến đó. Ta có thể:

Giải quyết bài toán theo cách của tích phân bất định, sau đó dùng cận trên và cận dưới.

Giải bài toán theo biến mới và cận trên, cận dưới mới.

Biểu diễn biến cũng như giá trị hai cận ban đầu trong toàn bộ quá trình đặt ẩn phụ.

Ta sẽ sử dụng phương pháp thứ 3.

Ví dụ 3: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ, tính:

$$\int_{-1}^{0} x^3(1-2x^4)^3\,dx$$

Trả lời ví dụ 3

Đặt $u = 1 - 2x^4$.

Khi đó $du = -8x^3\,dx$.

Đề bài chứa $x^3\,dx$ nên ta viết.

$$-\frac{du}{8} = x^3\,dx$$

Nên ta có:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{0} x^3(1-2x^4)^3\,dx \\
&= -\frac{1}{8}\int_{x=-1}^{x=0} u^3\,du \\
&= -\frac{1}{8}\cdot\frac{u^4}{4}\bigg|_{x=-1}^{x=0} \\
&= -\frac{1}{32}\cdot u^4\big|_{x=-1}^{x=0} \\
&= -\frac{1}{32}\cdot(1-2x^4)^4\big|_{-1}^{0} \\
&= -\frac{1}{32}\cdot((1-0)^4-(1-2)^4) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Sử dụng cách tiếp cận thứ hai, ở cách này, ta sẽ thực hiện phép đổi cận khi đổi biến đặt ẩn phụ:

$$u = 1 - 2x^4$$

Với $x = -1 \longrightarrow 0$ (điều này có nghĩa khi x đi từ 1 đến 0), thì $u = -1 \longrightarrow 1$.

Nên bài toán trở thành:

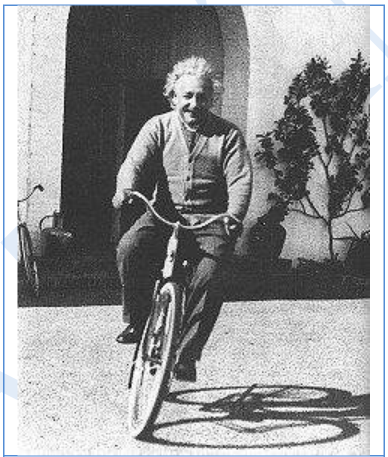
$$\int_{-1}^{0} x^3(1-2x^4)^3\,dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{8}\int_{-1}^{1} u^3\,du \\
&= -\frac{1}{32}u^4|_{-1}^{1} \\
&= -\frac{1}{32}(1^4-(-1)^4) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Kết quả này giống như kết quả ban đầu. Cách tiếp cận thứ 2 này phổ biến hơn, ít phức tạp hơn cách ban đầu.

II. ỨNG DỤNG: CÔNG

Trong vật lý, công được hình thành khi một lực tác động vào một vật và gây ra sự dịch chuyển, ví dụ như lái xe đạp.



Einstein lái xe đạp

Nếu có một lực biến thiên, thay đổi, ta dùng tích phân để tính công sinh ra bởi lực này.

Ta dùng:

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

với $F(x)$ là lực.

Ví dụ 4: Tính công sinh ra khi một lực $F(x) = \sqrt{2x-1}$, tác độc vào một vật thể làm vật này di chuyển từ $x = 1$ đến $x = 5$.

Trả lời ví dụ 4

Để giải quyết vấn đề này, ta cần tính:

$$\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,dx$$

Đặt $u = 2x - 1$, ta được $du = 2\,dx$.

Vậy:

$$\frac{du}{2} = dx$$

Nên ta được:

$$\begin{aligned}
&\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{x=1}^{x=5} u^{1/2}\,du \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{x=1}^{x=5} \\
&= \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2}\Big|_1^5 \\
&= \frac{26}{3}
\end{aligned}$$

Vậy công sinh ra là 8.67 đơn vị.

Nếu bạn muốn biết bản chất vì sao công lại có thể tính được bằng tích phân, bạn có thể xem chương "*Ứng dụng của tích phân*" để tìm hiểu.

III. ỨNG DỤNG: GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Giá trị trung bình của hàm $f(x)$ trong miền $x = a$ đến $x = b$ được xác định bởi:

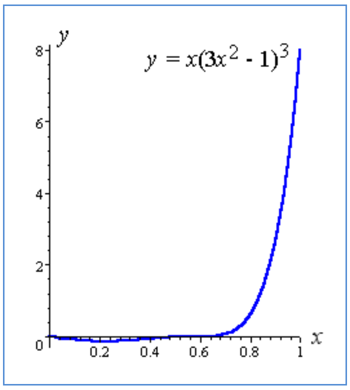
$$\text{Trung bình} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Ví dụ 5: Tính giá trị trung bình của:

$$x(3x^2 - 1)$$

khi x đi từ 0 đến 1.

Đây là đồ thị biểu diễn:



Trả lời ví dụ 5

Trong trường hợp này, $b - a = 1$, vậy để tính giá trị trung bình, ta chỉ cần tính tích phân:

$$\int_0^1 x(3x^2 - 1)^3\, dx$$

Dựa vào đồ thị, ta thấy rằng khi x đi từ 0 đến 1 thì $f(x)$ đa phần gần với giá trị 0. Vì vậy ta có thể dự đoán giá trị trung bình khoảng $y = 0.5$.

$$\int_0^1 x(3x^2 - 1)^3\, dx$$

Đặt $u = 3x^2 - 1$, khi đó $du = 6x\, dx$.

Vậy,

$$\frac{1}{6} du = x\, dx$$

Nên,

$$\int_0^1 x(3x^2 - 1)^3\, dx$$

$$= \frac{1}{6} \int_{x=0}^{x=1} u^3\, du$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{u^4}{4}\Bigg|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{24}(3x^2 - 1)^4|_0^1$$

$$= \frac{5}{8}$$

Vậy giá trị trung bình cần tìm là 0.625 đơn vị, gần giống với dự đoán của chúng ta.

IV. ỨNG DỤNG: QUÃNG ĐƯỜNG

Nếu ta biết biểu thức vận tốc v theo thời gian t, ta có thể biết quãng đường s của một vật thể khi đi từ thời gian $t = a$ đến $t = b$ bằng tích phân như sau:

$$s = \int_a^b v\,dt$$

Ví dụ 6: Tìm quãng đường của một vật thể đi từ lúc $t = 2$ đến $t = 3$, nếu vận tốc của vật thể tại thời gian t là:

$$v = \frac{t^2 + 1}{(t^3 + 3t)^2}$$

Trả lời ví dụ 6

Để tìm quãng đường, ta cần tính tích phân:

$$\int_2^3 \frac{t^2 + 1}{(t^3 + 3t)^2}\,dt$$

Đặt $u = t^3 + 3t$, ta được $du = 3t^2 + 3\,dt = 3(t^2 + 1)\,dt$.

Vậy:

$$\frac{du}{3} = (t^2 + 1)\,dt$$

Vậy ta được:

$$\int_2^3 \frac{t^2 + 1}{(t^3 + 3t)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_{t=2}^{t=3} \frac{1}{u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int_{t=2}^{t=3} u^{-2}\,du$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u}\Big|_{t=2}^{t=3}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^3 + 3t}\Big|_2^3$$

$$= 0.014\,55$$

Vậy quãng đường vật đi từ lúc $t = 2$ đến $t = 3$ là 0.015 đơn vị.

Nếu bạn muốn biết bản chất vì sao quãng đường lại có thể tính được bằng tích phân vận tốc, bạn có thể xem chương "*Ứng dụng của tích phân*" để tìm hiểu.

Chú ý 1: Bạn có thể thấy từ những ứng dụng của tích phân trong công, tính giá trị trung bình, tính quãng đường, tích phân xác định không chỉ đơn thuần dùng để tích diện tích dưới đường cong.

Chú ý 2: Tích phân xác định cho ta diện tích khi toàn bộ đường cong phải nằm trên trục x trên miền từ $x = a$ đến $x = b$. Nếu không, ta phải chia nhỏ ra từng trường hợp để giải quyết. Tôi sẽ trình bày kỹ hơn về điều này trong mục "*Tích phân diện tích dưới đường cong*" trong chương "*Ứng dụng của tích phân*".

Bây giờ ta sẽ kiểm tra những tích phân không thể giải bằng cách đặt ẩn phụ.

V. KHÔNG PHẢI MỌI TÍCH PHÂN ĐỀU GIẢI ĐƯỢC BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ

Hãy xem câu hỏi sau:

Tính:

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$$

Đặt $u = x^2 + 1$, sau đó ta tính vi phân, được $du = 2x\,dx$.

Nhưng đề bài lại không có $2x\,dx$ (chỉ có dx) nên ta không thể thay thế được điều gì theo du. Điều này có nghĩa ta không thể giải tích phân trên bằng những cách thức mà ta đã biết đến giờ. Thực ra, ta hoàn toàn có thể đặt ẩn phụ bằng hàm lượng giác nhưng do tôi chưa đề cập đến hàm này nên ta tạm bỏ qua. Bạn đọc nếu muốn xem có thể sang chương "*Các công thức tính tích phân*" để theo dõi.

Giải thích: Nếu như câu hỏi của bài là tính tích phân:

$$\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

Lúc này, đề bài có $2x\,dx$ nên ta có thể đặt:

$$u = x^2 + 1$$

Khi đó ta có thể vi phân:

$$du = 2x\,dx$$

Khi đó ta có thể áp dụng quy trình mà ta đã biết ở những bài trên bằng cách thay $2x\,dx$ thành du và căn thức thành $\sqrt{u}$.

Tuy nhiên, tích phân $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$ không có $2x$ ngoài căn nên tôi không thể dùng ẩn phụ u.

Vì vậy, để giải bài trên, ta cần đến hướng tiếp cận tính toán số để xấp xỉ giá trị tích phân:

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$$

(Lưu ý: Trong lịch sử, trước khi Newton, Leibniz phát triển cách tính tích phân như chúng ta đã thấy, mọi tích phân xác định đều được tính toán số để xấp xỉ giá trị tích phân).

Ta có thể dùng 2 cách tính toán số để xấp xỉ giá trị tích phân:

+ Quy tắc hình thang.

+ Quy tắc Simpson.

BÀI 3.1.6 QUY TẮC HÌNH THANG

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Tìm:

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$$

Ta đặt $u = x^2 + 1$, khi đó $du = 2x\,dx$.

Nhưng trong câu hỏi không có phần tử $x\,dx$ nên ta không thể giải được bằng bất kỳ công thức mà ta đã gặp từ đầu đến giờ.

Ta cần đến hướng tiếp cận tính toán số. (Thông thường các phần mềm tính toán hay đồ họa sử dụng hướng này để biểu diễn tích phân xác định).

Ta có thể dùng một trong hai công thức:

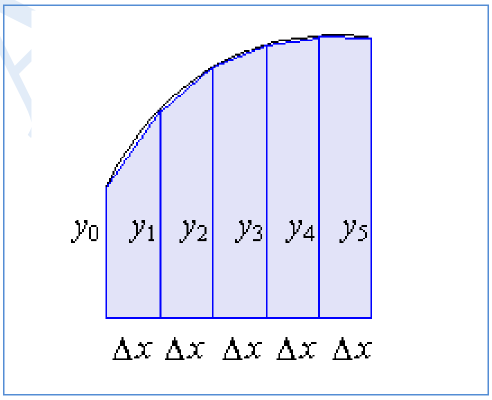
+ Quy tắc hình thang.

+ Quy tắc Simpson.

II. QUY TẮC HÌNH THANG

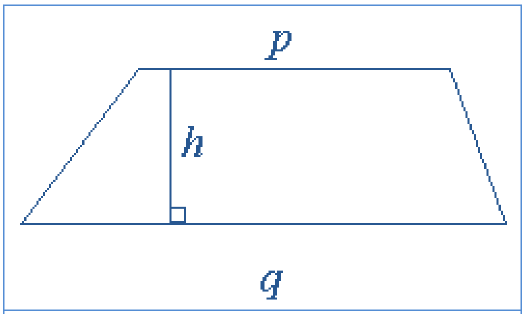
Ta sẽ quan sát lại ý tưởng cơ bản khi tích toán diện tích cổng vòm ở bài "*Diện tích dưới đường cong*".

Trong bài đó, thay vì ta dùng cách tính diện tích hình chữ nhật nhỏ, ta sẽ dùng hình thang. Bạn sẽ thấy dùng hình này sẽ cho ta giá trị xấp xỉ diện tích tốt hơn.



Nhớ rằng ý nghĩa của ký hiệu "Δx" là "sự thay đổi nhỏ giá trị x".

Ta có diện tích hình thang là:



$$\text{Diện tích} = \frac{h}{2}(p+q)$$

Vậy ta có thể dùng diện tích hình thang để xấp xỉ giá trị diện tích dưới đường cong. (Hình thang của chúng ta đã xoay $90°$ nên ta được $h = \Delta x$).

$$\text{Diện tích} \approx \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\Delta x + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)\Delta x + \cdots$$

Từ đó ta có quy tắc hình thang, với n hình thang như sau:

$$\text{Diện tích} \approx \Delta x\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + \frac{y_n}{2}\right)$$

Để tính Δx cho diện tích từ $x = a$ đến $x = b$, ta dùng:

$$\Delta x = \frac{b-a}{2}$$

và ta cũng cần:

$$\begin{aligned} y_0 &= f(a) \\ y_1 &= f(a + \Delta x) \\ y_2 &= f(a + 2\Delta x) \\ &\dots \\ y_n &= f(b) \end{aligned}$$

Lưu ý:

Càng nhiều hình thang, giá trị xấp xỉ của ta càng tốt.

Càng nhiều hình thang, giá trị Δx càng gần đến 0, tức $\Delta x \to 0$.

Ta có thể viết (nếu đường cong giữa $x = a$ và $x = b$ nằm phía trên trục x).

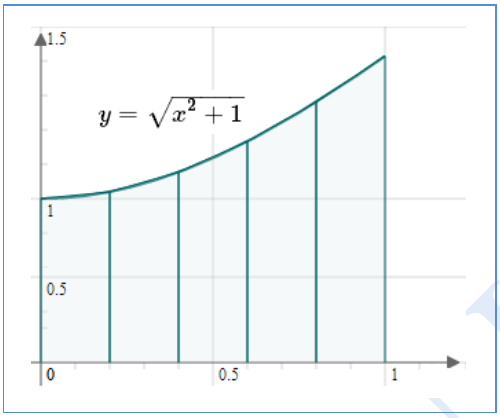
$$\text{Diện tích} = \int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

Ví dụ: Với $n = 5$, hãy xấp xỉ tích phân:

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$$

Trả lời ví dụ

Đây là đồ thị hàm số:



Trong hình này, tôi đã nối 2 điểm kế nhau trên 2 đoạn thẳng đứng thành 1 đoạn thẳng.

Ta có $a = 0$ và $b = 1$ nên chiều rộng của mỗi hình thang là:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$$
$$y_0 = f(a) = f(0) = \sqrt{0^2+1} = 1$$
$$y_1 = f(a+\Delta x) = f(0.2) = \sqrt{0.2^2+1} = 1.019\,803\,9$$
$$y_2 = f(a+2\Delta x) = f(0.4) = \sqrt{0.4^2+1} = 1.077\,033$$
$$y_3 = f(a+3\Delta x) = f(0.6) = \sqrt{0.6^2+1} = 1.166\,190\,4$$
$$y_4 = f(a+4\Delta x) = f(0.8) = \sqrt{0.8^2+1} = 1.280\,624\,8$$
$$y_5 = f(a+5\Delta x) = f(1.0) = \sqrt{1^2+1} = 1.414\,213\,6$$

Vậy ta được:

$$\text{Tích phân} \approx 0.2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 + 1.019\,803\,9 + 1.077\,033 + 1.166\,190\,4 + 1.280\,624\,8 + \frac{1}{2} \times 1.414\,213\,6\right)$$

$$= 1.15$$

Vậy:

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx \approx 1.15$$

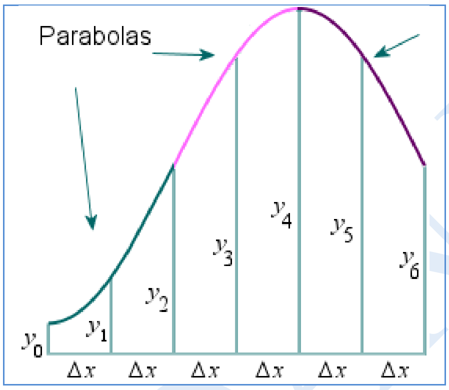
Ta có thể thấy ở hình trên, các hình thang rất sát với đường cong hàm số, nên kết quả xấp xỉ của chúng ta rất gần với kết quả chính xác. Thực ra, kết quả chính xác tích phân này, nếu lấy 3 số lẻ, là 1.148.

BÀI 3.1.7 QUY TẮC SIMPSON

Trong quy tắc hình thang, ta đã dùng những đoạn thẳng để mô phỏng đường cong và thấy rằng cách thức này cho kết quả tốt hơn cách dùng tổng diện tích các hình chữ nhật dưới đường cong vì quy tắc hình thang ít bỏ sót diện tích hơn ở mỗi phân đoạn.

Bây giờ chúng ta sẽ bước qua một quy tắc còn cho ra kết quả xấp xỉ tốt hơn cả quy tắc hình thang.

Ở quy tắc Simpson, chúng ta sẽ dùng hình parabola để xấp xỉ diện tích từng phần dưới đường cong. Cách này hiệu quả vì thường nó cho ra kết quả chính xác hơn hướng tiếp cận tính toán số mà ta đã gặp ở trên.



Ta chia diện tích ra thành n vùng có chiều rộng bằng nhau là Δx. Giá trị xấp xỉ diện tích được tính bởi công thức:

I. QUY TẮC SIMPSON

$$\text{Diện tích} = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + +2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n)$$

với $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Lưu ý: Với quy tắc Simpson, n phải là số chẵn.

Bây giờ chúng ta sẽ quan sát cách thức mà quy tắc này hoạt động.

Cách nhớ: Ta có thể viết lại quy tắc Simpson bằng cách nhóm các phần tử như sau:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots) + y_n)$$

Điều này cho ta cách nhớ rất đơn giản về quy tắc Simpson:

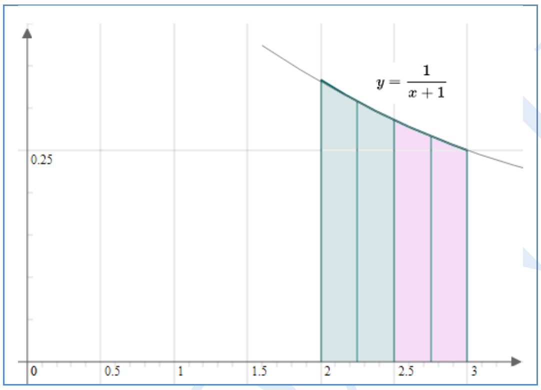
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left(\text{ĐẦU} + 4(\text{tổng các LẺ}) + 2(\text{tổng các CHẴN}) + \text{CUỐI}\right)$$

Ví dụ: Hãy xấp xỉ tích phân sau bằng quy tắc Simpson với $n = 4$.

$$\int_2^3 \frac{1}{x+1}dx$$

Trả lời ví dụ

Đây là đồ thị hàm số:



$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-2}{4} = 0.25$$
$$y_0 = f(a) = f(2) = \frac{1}{2+1} = 0.333\,333\,3$$
$$y_1 = f(a+\Delta x) = f(2.25) = \frac{1}{2.25+1} = 0.307\,692\,3$$
$$y_2 = f(a+2\Delta x) = f(2.5) = \frac{1}{2.5+1} = 0.285\,714\,2$$
$$y_3 = f(a+3\Delta x) = f(2.75) = \frac{1}{2.75+1} = 0.266\,666\,7$$
$$y_4 = f(a+4\Delta x) = f(3) = \frac{1}{3+1} = 0.25$$

Vậy:

$$\begin{aligned}\text{Diện tích} &= \int_a^b f(x)\,dx \\ &\approx \frac{0.25}{3}(0.333\,333\,3 + 4(0.307\,692\,3) \\ &\qquad + 2(0.285\,714\,2) \\ &\qquad + 4(0.266\,666\,7) + 0.25)\end{aligned}$$

$$= 0.287\,683\,1$$

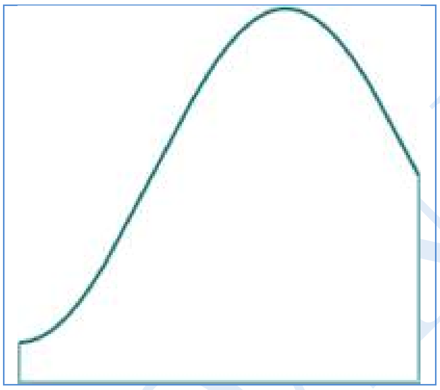
Lưu ý:

Đáp án chính xác của bài toán này là 0.287 682 (lấy 6 chữ số lẻ), qua đó ta thấy quy tắc Simpson cho ra đáp án có độ sai sót chỉ khoảng 0.000 36 %.

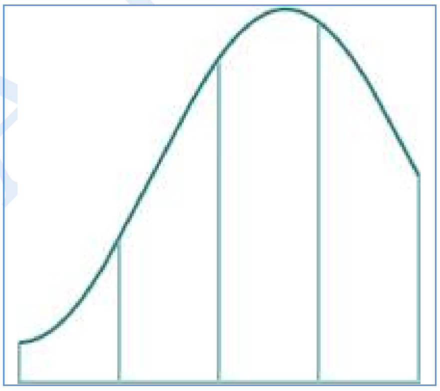
Ở ví dụ này, đường cong gần giống như hình parabola, nên 2 hình parabola ở trên gần trùng với đường cong $y = \frac{1}{x+1}$.

II. Ý TƯỞNG VÀ CHỨNG MINH QUY TẮC SIMPSON

Chúng ta sẽ tính diện tích dưới đường cong sau:



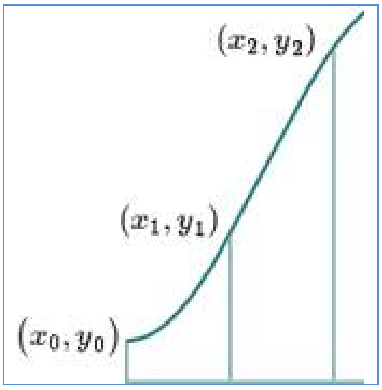
Ta chia hình này ra thành 4 phần có độ rộng bằng nhau. (Với quy tắc Simpson, số phần chia phải chẵn).



Ta sẽ xây dựng hình parabola sao cho ở mỗi phần, parabola này gần như trùng với đường cong trên phần đó.

Lưu ý: Thực ra khi sử dụng quy tắc Simpson, chúng ta không cần thiết phải xây dựng parabola. Tôi trình bày cách xây dựng chúng nhằm cho bạn hiểu cách hoạt động của quy tắc Simpson.

Hãy bắt đầu với 2 phần ở bên trái, ta lấy điểm đầu, điểm cuối và điểm giữa như hình sau:



Ta đo giá trị các điểm (sử dụng lưới tọa độ), ba điểm này sẽ là:

$$(x_0; y_0) = (-1.57; 1)$$
$$(x_1; y_1) = (-0.39; 1.62)$$
$$(x_2; y_2) = (0.79; 2.71)$$

Sử dụng ba điểm này, áp dụng công thức tổng quát của parabola $y = ax^2 + bx + c$, thay các giá trị $x; y$ đã biết như sau:

$$1 = a(-1.57)^2 + b(-1.57) + c$$
$$1.62 = a(-0.39)^2 + b(-0.39) + c$$
$$2.71 = a(0.79)^2 + b(0.79) + c$$

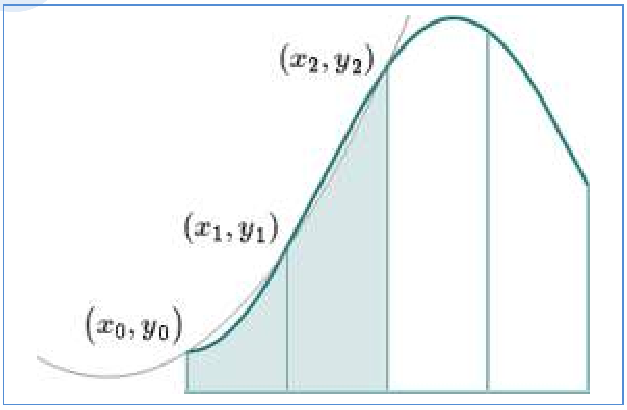
Ta được hệ 3 phương trình 3 ẩn, giải hệ này, ta được:

$$\begin{cases} a = 0.170\ 21 \\ b = 0.858\ 20 \\ c = 1.928\ 08 \end{cases}$$

Vậy phương trình parabola đi qua 3 điểm trên là:

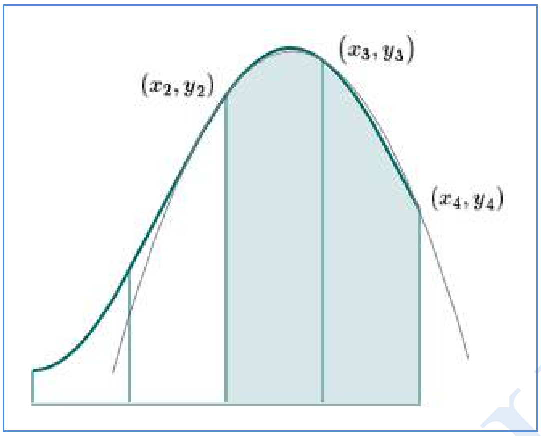
$$y = 0.170\ 21x^2 + 0.858\ 20x + 1.928\ 08$$

Đây là hình dáng đồ thị:

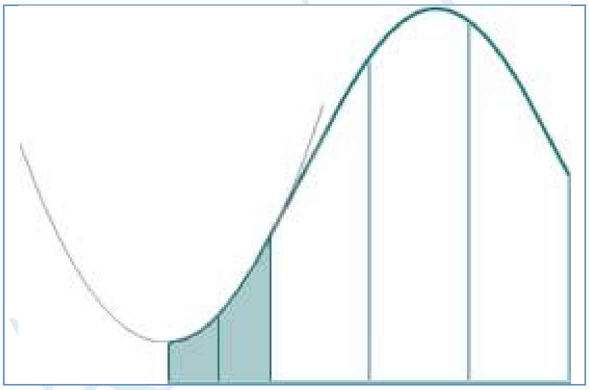


Ta có thể thấy rằng parabola đi qua 3 điểm và rất sát với đường cong. Vì vậy parabola áp dụng trong phần diện tích này sẽ rất lý tưởng để xấp xỉ. Như thường lệ, ta càng chia hình ra nhiều phần, ra càng thu về giá trị diện tích chính xác.

Với 2 phần cuối, ta làm quy trình tương tự, xác định parabola đi qua 3 điểm sẽ có hình dạng thư thế này:



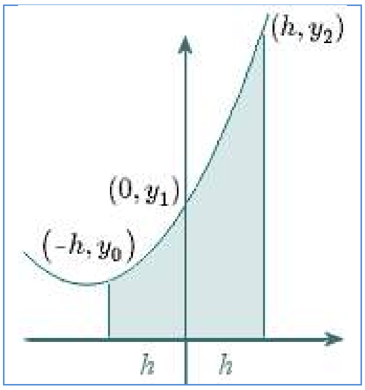
Bạn thấy rằng có kẽ hở giữa hình parabola và đường cong. Ta chỉ cần chia đôi kích thước phần để giảm đi độ lớn kẽ hở như ở hình sau, parabola gần như trùng với đường cong.



Chứng minh quy tắc Simpson:

Ta quan sát diện tích dưới parabola $y = ax^2 + bx + c$.

Cách đơn giản, ta bắt đầu với điểm $(0; y_1)$ và quan sát diện tích dưới parabola giữa $x = -h$ và $x = h$ như hình dưới đây. (Lưu ý rằng $\Delta x = h$).



Ta có:

$$\int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\, dx$$
$$= \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\Big|_{-h}^{h}$$
$$= \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c)$$

Parabola đi qua các điểm $(-h; y_0)$; $(0; y_1)$; $(h; y_2)$. Thay các giá trị x và y vào phương trình parabola, ta được kết quả:

$$y_0 = ah^2 - bh + c$$
$$y_1 = c$$
$$y_2 = ah^2 + bh + c$$

Giải các phương trình trên, ta được $c = y_1$ và $2ah^2 = y_0 - 2y_1 + y_2$.

Thay vào $A = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c)$ ở trên, ta được:

$$A = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Diện tích của parabola khi đi qua 3 điểm tiếp theo là:

$$A = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Cộng 2 diện tích lại, ta được:

$$A = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Do ta có 6 phần nhỏ nên ta chỉ cần xác định diện tích dưới 3 parabola và cộng chúng lại.

$$A = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)$$

Ta cứ tiếp tục quy trình này nhiều lần bằng cách tạo càng nhiều phần nhỏ, sau đó tạo parabola, tính diện tích, cộng lại, ta sẽ được quy tắc Simpson.

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots) + y_n)$$

PHẦN 3.2 ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

BÀI 3.2.1 MỞ ĐẦU

Trong phần này:

+ Bài 3.2.1: Mở đầu:

+ Bài 3.2.2 **Ứng dụng của tích phân bất định**: Sử dụng tích phân bất định để tính quãng đường khi biết vận tốc, tính vận tốc khi biết gia tốc. Ngoài ra còn một số ứng dụng trong điện học.

Ở tiểu học, ta được học cách tính diện tích của những hình có cạnh thẳng (như hình chữ nhật, hình vuông, tam giác, …). Nhưng nếu như cạnh là đường cong thì sao? Ta sẽ tìm hiểu tại:

+ Bài 3.2.3 **Diện tích dưới đường cong.**

+ Bài 3.2.4 **Diện tích giữa 2 đường cong.**

+ Bài 3.2.5 **Thể tích khối tròn xoay**: Giải thích cách dùng tích phân để xác định thể tích của vật thể có cạnh là đường cong, như thùng rượu, ….

+ Bài 3.2.6 **Trọng tâm bề mặt:** Hay trọng tâm. Ta sẽ dùng tích phân để xác định trọng tâm của bề mặt có cạnh cong.

+ Bài 3.2.7 **Moment quán tính:** Giải thích cách tìm độ bền của vật thể đang quay. Ta dùng tích phân với vật thể có hình dáng cạnh cong.

+ Bài 3.2.8 **Công sinh ra bởi lực biến thiên**: Hướng dẫn cách tìm công sinh ra của một vật khi lực không phải là hằng số. Bài này bao gồm định luật Hooke cho lò xo.

+ Bài 3.2.9 **Điện tích:** Giữa 2 vật mang điện luôn có 1 lực, phụ thuộc vào lượng điện tích và khoảng cách giữa chúng. Ta dùng tích phân để xác định công sinh ra khi tách 2 điện tích.

+ Bài 3.2.10 **Giá trị trung bình:** Ta có thể tính giá trị trung bình của đường cong bằng tích phân.

+ Bài 3.2.11 **Tiêu chuẩn chấn thương đầu** là một ứng dụng của giá trị trung bình, được dùng trong nghiên cứu an toàn giao thông.

+ Bài 3.2.12 **Lực của áp suất chất lỏng**: Lực này phụ thuộc vào hình dạng và độ sâu của vật thể. Ta dùng tích phân để tính lực.

Trong từng phần, ta sẽ tiếp cận vấn đề đơn giản trước, thông thường sẽ là diện tích hay thể tích có cạnh thẳng. Sau đó ta sẽ mở rộng từ cạh thẳng sang cạnh cong. Ta cần đến tích phân vì ta đang tiếp cận cạnh cong, không thể dùng những công thức đơn giản nữa.

BÀI 3.2.2 ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

I. QUÃNG ĐƯỜNG TỪ VẬN TỐC, VẬN TỐC TỪ GIA TỐC

Một ứng dụng rất hữu ích của tích phân đó là quãng đường, vận tốc và gia tốc.

Trong bài "*Đạo hàm với tốc độ thay đổi tức thời*", ta có thể tìm biểu thức vận tốc bằng cách lấy đạo hàm biểu thức quãng đường.

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Tương tự, ta có thể tìm biểu thức gia tốc bằng cách lấy đạo hàm biểu thức vận tốc, hay đạo hàm cấp 2 của biểu thức quãng đường.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Vì tích phân có thể xem như quy trình ngược lại của vi phân, từ biểu thức vận tốc v, ta có thể tìm biểu thức quãng đường s theo thời gian t bằng cách lấy tích phân biểu thức vận tốc đó.

$$s = \int v\,dt$$

Tương tự, biểu thức vận tốc v theo thời gian t có gia tốc a là:

$$v = \int a\,dt$$

Ví dụ 1: Một hạt proton di chuyển trong điện trường có biểu thức gia tốc (theo cm/s^2) là:

$$a = -20(1+2t)^{-2}$$

với t tính bằng giây.

Tìm hàm vận tốc v theo t, biết rằng khi $t = 0$ thì $v = 30\,cm/s^2$.

Trả lời ví dụ 1

$$v = \int a\,dt$$

Vậy,

$$v = \int \frac{-20}{(1+2t)^2}dt$$

Đặt $u = 1 + 2t$, ta được $du = 2\,dt$, vậy $dt = \frac{du}{2}$.

$$v = \int \frac{-10}{u^2}du$$

$$= \int -10u^{-2}\,du$$
$$= \frac{10}{u} + K$$
$$= \frac{10}{1+2t} + K$$

Với $t = 0$; $v = 30$, vậy $K = 20$.

Vậy biểu thức vận tốc theo thời gian là:

$$v = \left(\frac{10}{1+2t} + 20\right) cm/s^2$$

Ví dụ 2: Một tia lửa được bắn thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc 15 m/s. Hỏi sau 2.5 s, tia lửa ấy có chiều cao là bao nhiêu?

Trả lời ví dụ 2

Tia lửa chịu sự tác động của trọng lực hướng xuống nên ta có gia tốc là $-9.8\ m/s^2$.

$$v = \int a\,dt$$
$$= \int -9.8\,dt$$
$$= -9.8t + C$$

Với $t = 0$, ta có vận tốc $v = 15\,m/s$, vậy $C = 15$.

Vậy ta được biểu thức vận tốc:

$$v = -9.8t + 15$$

Lấy tích phân biểu thức vận tốc, ta được biểu thức quãng đường.

$$s = \int v\,dt$$
$$= \int -9.8t + 15\,dt$$
$$= -4.9t^2 + 15t + K$$

Theo đề bài, ta được khi $t = 0$ thì $s = 0$, vậy ta được $K = 0$.

Vậy:

$$s = -4.9t^2 + 15t$$

Khi $t = 2.5\ s$, ta được $s = 6.875\ m$.

II. CÔNG THỨC TÍNH QUÃNG ĐƯỜNG VÀ VẬN TỐC

Dùng tích phân, ta có thể thiết lập công thức tổng quát cho quãng đường và vận tốc khi biết hằng số gia tốc a, vị trí ban đầu của vật thể và vận tốc đầu v_0.

$$v = \int a\,dt$$
$$v = at + K$$

Khi $t = 0$, ta được $v = v_0$ nên $K = v_0$, vậy:

$$v = v_0 + at$$

Tương tự, tính tích phân hàm vận tốc, ta được:

$$s = \int v\,dt = \int v_0 + at\,dt$$
$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C$$

Khi $t = 0$, ta được quãng đường $s = 0$ nên $C = 0$. Vì vậy ta được:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

III. HIỆU ĐIỆN THẾ QUA TỤ ĐIỆN

Định nghĩa: Cường độ dòng điện i (đơn vị Ampere) trong mạch điện bằng với thời gian tốc độ thay đổi điện tích q (đơn vị Coulomb) đi qua một điểm cho trước trong mạch. Ta có thể viết thành biểu thức theo thời gian t như sau:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Bằng cách viết $i\,dt = dq$ và lấy tích phân, ta được:

$$q = \int i\,dt$$

Hiệu điện thế V_C (đơn vị Volt) đi qua tụ điện có điện dung C (đơn vị Farad) có biểu thức:

$$V_C = \frac{q}{C}$$

Từ đó, ta có biểu thức:

$$V_C = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

Ví dụ 3: Trong mạch máy tính, cường độ dòng điện (đơn vị mA) là một hàm số theo thời gian t,

$$i = 0.3 - 0.2t$$

Tổng điện tích đi qua một điểm trong mạch trong $0.05\ s$ là bao nhiêu?

Trả lời ví dụ 3

Ta có biểu thức tính điện tích q như sau:

$$q = \int i\, dt$$
$$= \int 0.3 - 0.2t\, dt$$
$$= 0.3t - 0.1t^2 + K$$

Khi $t = 0$; $q = 0$, vì vậy ta được $K = 0$.

Vậy:

$$q = 0.3t - 0.1t^2$$
$$q|_{t=0.05} = 0.3(0.05) - 0.1(0.05)^2 = 0.015\, mC$$

(đơn vị đo là mili-coulomb vì cường độ dòng điện i là mA).

Ví dụ 4: Hiệu điện thế đi qua tụ điện có điện dung $8.5\, nF$ đặt trong mạch thu sóng FM gần bằng 0. Nếu có cường độ dòng điện $i = 0.042t$ (theo mA) nạp vào tụ, tìm hiệu điện thế sau $2\, \mu s$.

Trả lời ví dụ 4

$$V_C = \frac{1}{C}\int i\, dt$$

Lưu ý: $1\, nF = 10^{-9}$ F; $1\, \mu s = 10^{-6}\, s$.

Đồng thời, $0.042t\ (mA) = 0.042 \times 10^{-3} t\ (A)$.

$$V_C = \frac{0.042 \times 10^{-3}}{8.5 \times 10^{-9}} \int t\, dt$$
$$= 4.94 \times 10^3 \frac{t^2}{2} + K$$
$$= 2.47 \times 10^3 t^2 + K$$

Theo giả thiết, khi $t = 0$ thì $V_C = 0$. Vậy $K = 0$.

Do đó:

$$V_C = 2.47 \times 10^3 t^2$$

Vậy khi $t = 2\, \mu s$, ta được:

$$V_C = 2.47 \times 10^3 (2 \times 10^{-6})^2$$
$$= 9.882 \times 10^{-9}$$

$$= 9.88\,nV$$

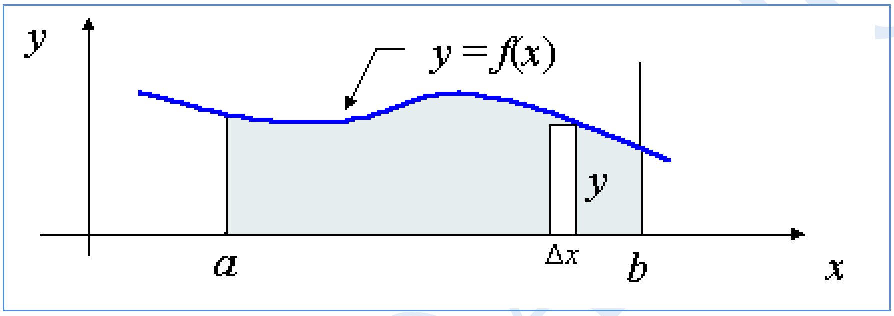
BÀI 3.2.3 DÙNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH DƯỚI ĐƯỜNG CONG

Trong chương tích phân, ta đã làm quen với một số khái niệm tính diện tích dưới đường cong. Trong bài này, ta sẽ phát triển khái niệm ấy. Bạn có thể xem phần đọc thêm ở cuối chương này với bài "*Archimedes và diện tích một phần parabola*", bạn sẽ khám phá ra rằng Archimedes đã nắm được mấu chốt hình thành vi tích phân trước thời đại của Newton và Leibiz những 2000 năm.

Lưu ý: Bạn cần biết vẽ đồ thị trước khi nghiên cứu bài này.

Ta muốn tìm diện tích dưới đường cong $y = f(x)$ từ $x = a$ đến $x = b$. Ta có một vài trường hợp sau.

Trường hợp 1: Đường cong nằm hoàn toàn trên trục x.



Trong trường hợp này, ta sẽ tính diện tích bằng cách tính tích phân.

$$\text{Diện tích} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Vì sao ta có công thức này?

I. NGUYÊN LÝ CƠ BẢN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH DƯỚI ĐƯỜNG CONG

Ở hình trên có xuất hiện một hình chữ nhật có chiều rộng là Δx và chiều cao y. Vậy diện tích hình chữ nhật đó là $y\Delta x$.

Nếu ta cộng tất cả hình chữ nhật như trên với nhau bắt đầu từ a và kết thúc tại b, ta được giá trị xấp xỉ diện tích:

$$\sum_{x=a}^{b}(y)\Delta x$$

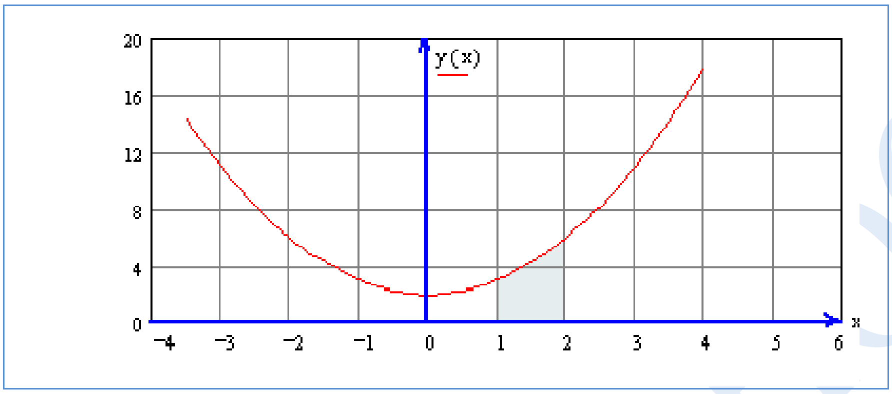
Bây giờ nếu ta để $\Delta x \longrightarrow 0$, ta có thể tính chính xác diện tích bằng tích phân.

$$\text{Diện tích} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Phép lấy tổng này còn được gọi là tổng Riemann. Bạn có thể thực hành tổng này tại trang http://www.intmath.com/integration/riemann-sums.php.

Ví dụ 1: Tính diện tích dưới đường cong $y = x^2 + 2$ từ $x = 1$ đến $x = 2$.

Trả lời ví dụ 1



$$\text{Diện tích} = \int_a^b f(x)\,dx$$

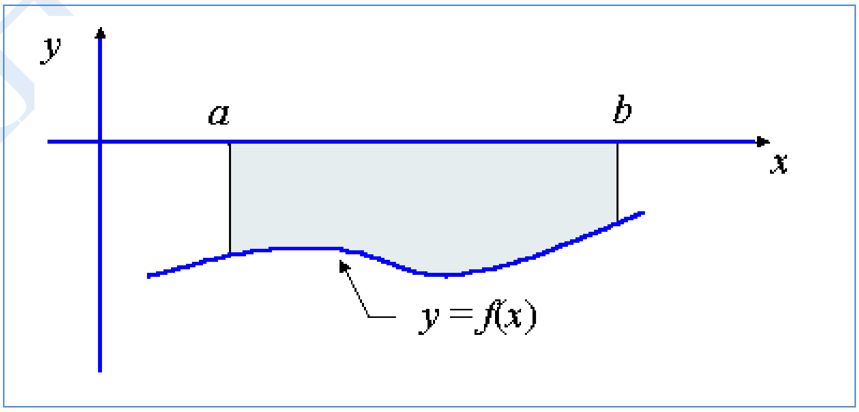
$$= \int_1^2 x^2 + 2\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 2x\Big|_1^2$$

$$= \frac{13}{3}\ \text{đơn vị}^2$$

Trường hợp 2: Đường cong nằm hoàn toàn dưới trục x.

Ta sẽ xét trường hợp đường cong nằm dưới trục x với mọi giá trị x được xét.

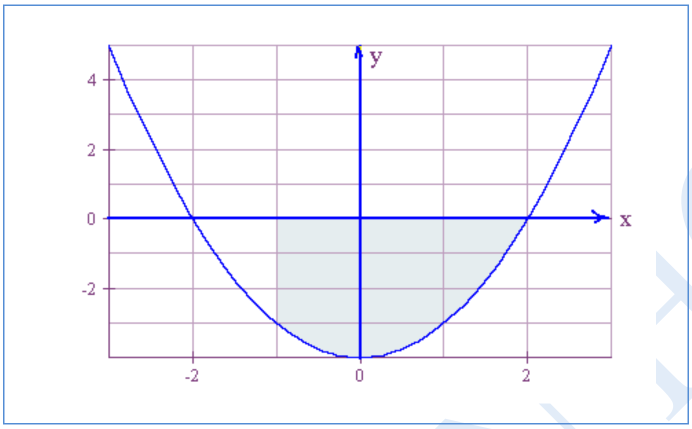


Trong trường hợp này, tích phân cho ra số âm. Ta cần lấy trị tuyệt đối để tính diện tích.

$$\text{Diện tích} = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$$

Ví dụ 2: Tính diện tích bao bởi $y = x^2 - 4$, trục x và đường $x = -1$ và $x = 2$.

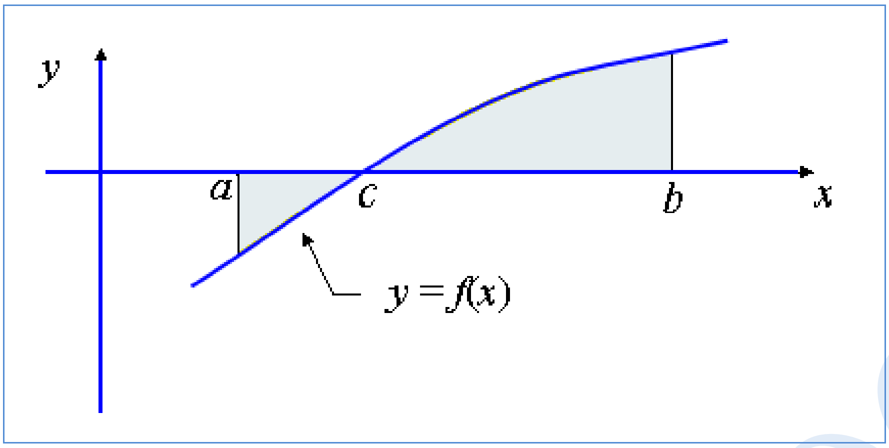
Trả lời ví dụ 2



Hình phẳng yêu cầu nằm hoàn toàn dưới trục x, vậy ta cần dùng đến dấu trị tuyệt đối.

$$\begin{aligned}\text{Diện tích} &= \left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \\ &= \left| \int_{-1}^{2} x^2 - 4\, dx \right| \\ &= \left| \frac{x^3}{3} - 4x \Big|_{-1}^{2} \right| \\ &= |-9| \\ &= 9 \text{ đơn vị}^2\end{aligned}$$

Trường hợp 3: Một phần đường cong nằm dưới trục x, phần còn lại nằm trên trục x



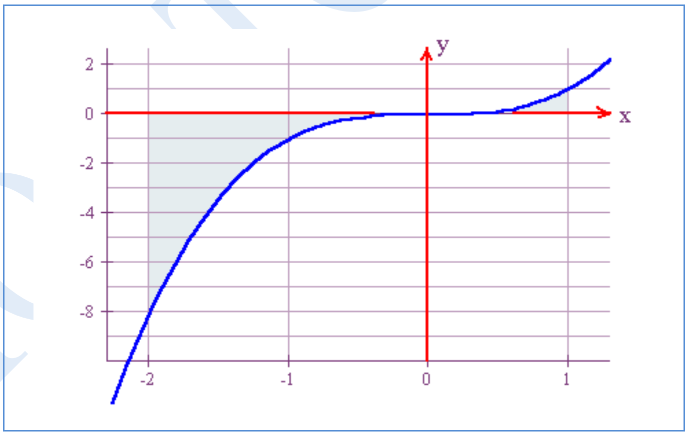
Trong trường hợp này, ta cần phải cộng những phần riêng biệt, lấy trị tuyệt đối phần nằm dưới trục x (từ $x = a$ đến $x = c$).

$$\text{Diện tích} = \left|\int_a^c f(x)\,dx\right| + \int_c^b f(x)\,dx$$

Nếu ta không làm vậy, phần diện tích "dương" (phần nằm trên trục x) sẽ trừ đi phần diện tích "âm", khiến cho giá trị cuối cùng không còn chính xác.

Ví dụ 3: Tính diện tích bao bởi đường cong $y = x^3$ từ $x = -2$ đến $x = 1$.

Trả lời ví dụ 3



Ta có thể thấy ở đồ thị rằng phần giữa $x = -2$ và $x = 0$ nằm dưới trục x, vậy ta cần lấy trị tuyệt đối cho phần đó.

$$\text{Diện tích} = \left|\int_{-2}^{0} x^3\,dx\right| + \int_0^1 x^3\,dx$$

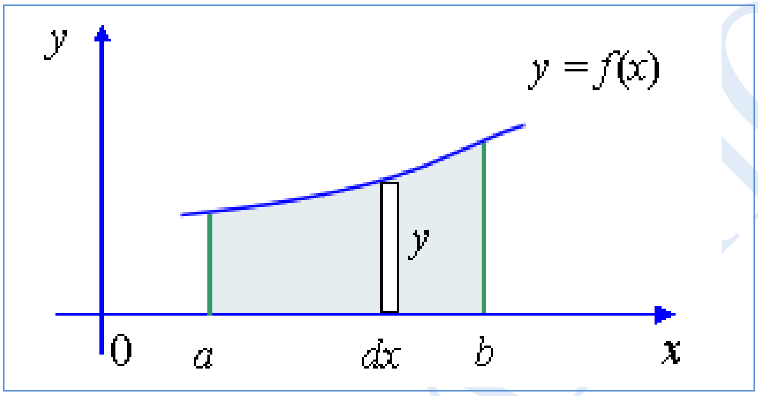
$$= \left| \frac{x^4}{4} \Big|_{-2}^{0} \right| + \frac{x^4}{4} \Big|_{0}^{1}$$

$$= |-4| + \frac{1}{4}$$

$$= 4.25 \text{ đơn vị}^2$$

Kết luận (qua 3 trường hợp):

Ở từng trường hợp, ta cộng các phần tử từ trái sang phải như sau:



Chúng ta tìm diện tích bằng cách cộng theo phương nằm ngang diện tích các hình chữ nhật, chiều rộng dx, chiều cao y (xác định bằng cách thay giá trị x vào $f(x)$).

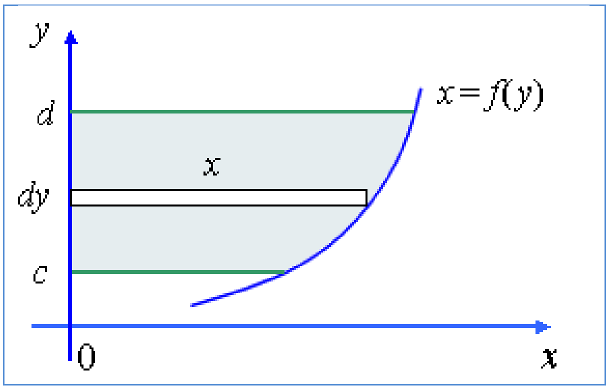
Vậy:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

(giá trị tuyệt đối sử dụng khi đường cong nằm dưới trục x).

Trường hợp 4: Tính diện tích bằng cách cộng theo phương thẳng đứng.

Ở vài trường hợp, nếu ta lấy tổng diện tích theo phương thẳng đứng, ta sẽ tìm diện tích dễ dàng hơn. Một vài trường hợp chỉ sử dụng được cách này.



Trong trường hợp này, ta tìm diện tích bằng cách cộng các hình chữ nhật có chiều rộng dy, chiều cao $x = f(y)$.

Nếu ta có $y = f(x)$, ta cần biểu diễn lại thành dạng $x = f(y)$ và ta cộng từ đáy lên trên đỉnh.

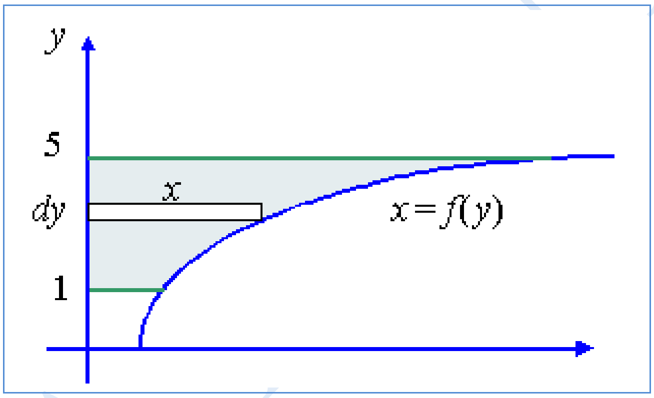
Vậy, ở trường hợp 4, ta có:

$$A = \int_c^d f(y)\,dy$$

Ví dụ 4: Tính diện tích của miền bao bởi đường cong $y = \sqrt{x-1}$, trục y, đường $y = 1$ và $y = 5$.

Trả lời ví dụ 4

Ta vẽ đồ thị:



Trong trường hợp này, ta biểu diễn x là một hàm theo y:

$$y = \sqrt{x-1}$$

$$y^2 = x - 1$$

$$x = y^2 + 1$$

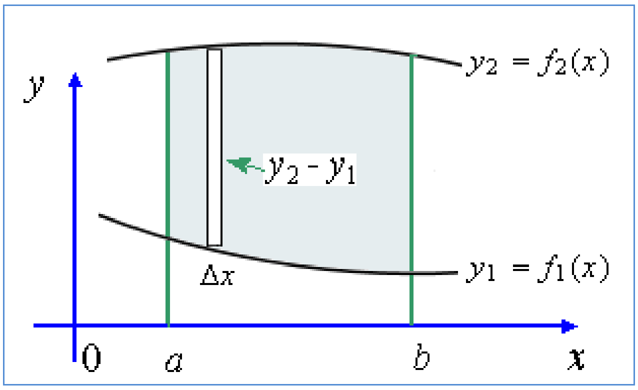
Vậy diện tích là:

$$A = \int_1^5 y^2 + 1\,dy = \frac{y^3}{3} + y\Big|_1^5$$

$$= 45\frac{1}{3} \text{ đơn vị}^2$$

Lưu ý: Trong ví dụ này, ta có thể cộng theo phương nằm ngang (lấy tích phân y, dùng dx), nhưng ta phải chia ra làm nhiều phần để tính.

BÀI 3.2.4 DÙNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH DƯỚI 2 ĐƯỜNG CONG



Ta sẽ tìm diện tích giữa 2 đường cong $y_1 = f_1(x)$ và $y_2 = f_2(x)$ và đường $x = a$ và $x = b$.

Ta thấy rằng nếu ta lấy diện tích dưới đường cong $y_2 = f_2(x)$ trừ đi diện tích dưới đường cong $y_1 = f_1(x)$, ta sẽ được diện tích hình phẳng cần tìm. Khi đó, áp dụng tích phân, ta có công thức tính diện tích:

$$A = \int_a^b y_2 - y_1 \, dx$$

I. MỘT CÁCH KHÁC ĐỂ TÌM CÔNG THỨC (NGUYÊN LÝ CƠ BẢN)

Một cách khác để tìm công thức trên như sau (ý tưởng ở đây rất quan trọng trong việc hiểu rõ cách ta phát triển công thức sau trong bài này).

Mỗi hình chữ nhật đặc trưng có chiều rộng là Δx và chiều cao $y_2 - y_1$, vậy diện tích hình chữ nhật đó là $(y_2 - y_1)\Delta x$.

Nếu ta cộng hết diện tích các hình chữ nhật này lại, bắt đầu từ a và kết thúc tại b, ta có diện tích xấp xỉ:

$$\sum_{x=a}^{b} (y_2 - y_1)\Delta x$$

Bây giờ nếu ta để $\Delta x \longrightarrow 0$, ta có thể tính chính xác diện tích thông qua tích phân:

$$A = \int_a^b y_2 - y_1 \, dx$$

II. CỘNG THEO PHƯƠNG THẲNG ĐỨNG ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH GIỮA 2 ĐƯỜNG CONG

Tương tự, ta có thể cộng theo phương thẳng đứng bằng cách biểu diễn lại hàm số theo y và ta tìm:

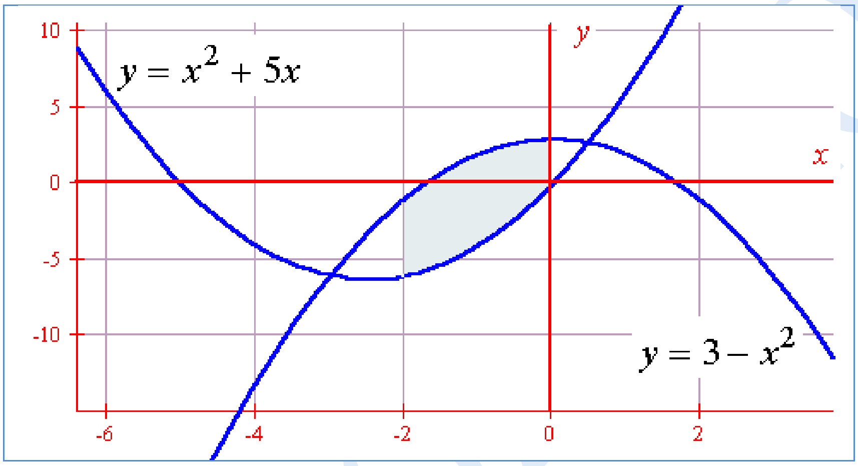
$$A = \int_c^d x_2 - x_1\, dy$$

Lưu ý rằng c và d là giới hạn của tích phân nhắc ta đang cộng theo phương thẳng đứng, dy nhắc ta đang biểu diễn hàm số theo biến y.

Ví dụ: Tìm diện tích giữa 2 đường cong $y = x^2 + 5x$ và $y = 3 - x^2$, giữa $x = -2$ và $x = 0$.

Trả lời ví dụ

Vẽ đồ thị:



Vậy ta cần tìm:

$$\text{Diện tích} = \int_a^b y_2 - y_1\, dx$$

$$= \int_{-2}^{0} \left((3 - x^2) - (x^2 + 5x)\right) dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (-2x^2 - 5x + 3)\ dx$$

$$= -\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x\Big|_{-2}^{0}$$

$$= 10\frac{2}{3}\ \text{đơn vị}^2$$

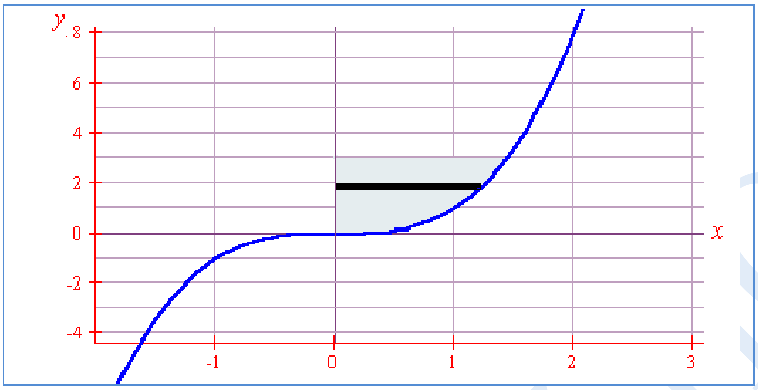
Bạn thấy rằng một phần hình phẳng được tô màu nằm phía dưới trục x, phần còn lại nằm phía trên, bạn đừng lo lắng về việc có nên lấy dấu trị tuyệt đối hay không vì bản thân công thức đã đảm bảo điều đó.

III. BÀI TẬP

Bài tập 1: Tìm diện tích bao bởi $y = x^3$, $x = 0$ và $y = 3$.

Trả lời bài tập 1

Trước tiên, ta vẽ đồ thị:



Ta sẽ dùng:

$$\text{Diện tích} = \int_c^d f(y)\,dy$$

và dùng các phần tử nằm phương ngang. Trong ví dụ này ta có thể cộng theo phương ngang, nhưng ta sẽ cộng theo phương thẳng đứng để minh họa cho công thức.

Trong trường hợp này, $c = 0$ và $d = 3$.

Ta cần biểu diễn x theo y: $y = x^3$. Nên $x = y^{1/3}$. Vậy:

$$\text{Diện tích} = \int_c^d f(y)\,dy$$

$$= \int_0^3 y^{1/3}\,dy$$

$$= \frac{3}{4} y^{4/3}\Big|_0^3$$

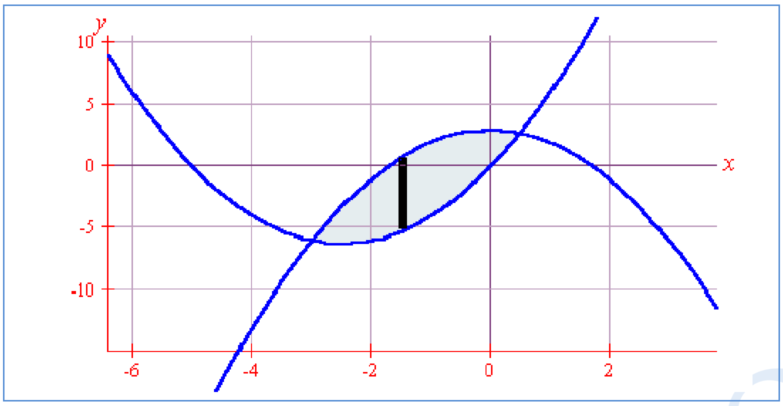
$$= 3.245 \text{ đơn vị}^2$$

Bài tập 2: Tìm diện tích được bao bởi 2 đường cong $y = x^2 + 5x$ và $y = 3 - x^2$.

(đây là một mở rộng của phần ví dụ ở trên).

Trả lời bài tập 2

Ta vẽ đồ thị:



Ta cần dùng công thức:

$$A = \int_a^b y_2 - y_1 \, dx$$

Ta thấy rằng $y = 3 - x^2$ nằm phía trên đề thị $y = x^2 + 5x$ nên ta lấy $y_2 = 3 - x^2$ và $y_1 = x^2 + 5x$.

Ta tìm giao điểm của 2 đồ thị:

$$x^2 + 5x = 3 - x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 0.5 \end{array}\right.$$

Ta lấy các phần tử hướng thẳng đứng.

Vậy diện tích được tính bởi công thức:

$$\text{Diện tích} = \int_a^b y_2 - y_1 \, dx$$

$$= \int_{-3}^{0.5} (3 - x^2) - (x^2 + 5x) \, dx$$

$$= \int_{-3}^{0.5} 3 - 5x - 2x^2 \, dx$$

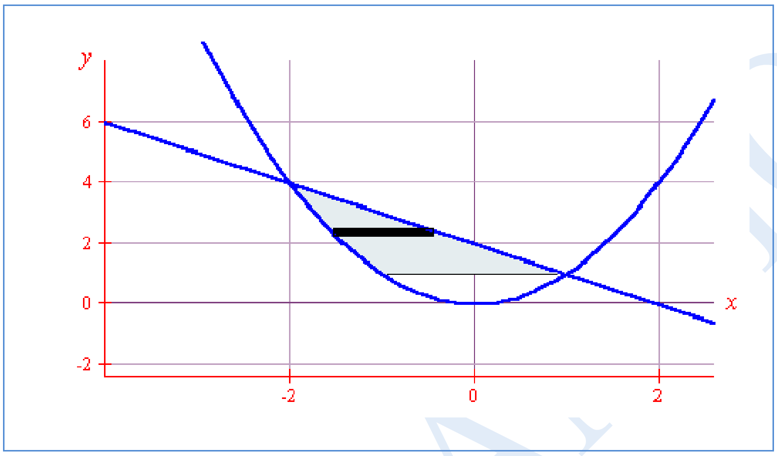
$$= 3x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3\Big|_{-3}^{0.5}$$

$$= 14.29 \text{ đơn vị}^2$$

Bài tập 3: Tìm diện tích bao bởi đường cong $y = x^2$, $y = 2 - x$ và $y = 1$.

Trả lời bài tập 3

Ta vẽ đồ thị:



Trong trường hợp này, ta lấy các phần tử nằm ở phương ngang.

Ta cần giải $y = x^2$ theo x:

$$x = \pm\sqrt{y}$$

Ta cần phần nằm bên trái, vậy $x = -\sqrt{y}$.

Lưu ý rằng $x = 2 - y$ nằm bên phải $x = -\sqrt{y}$ nên ta chọn $x_2 = 2 - y$ và $x_1 = -\sqrt{y}$.

Giao điểm 2 đồ thị xảy ra tại $(-2; 4)$ và $(1; 1)$.

Vậy ta được $c = 1$ và $d = 4$.

$$\text{Diện tích} = \int_c^d x_2 - x_1\, dy$$

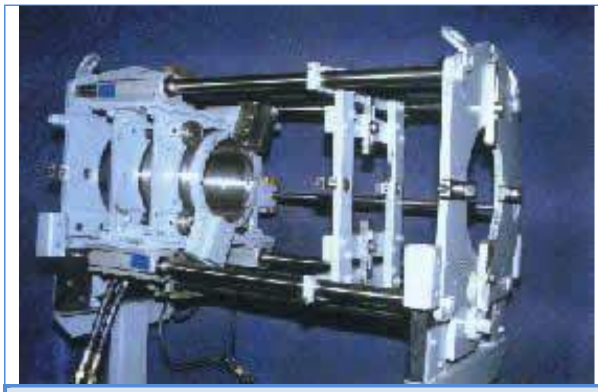
$$= \int_1^4 (2 - y) - (-\sqrt{y})\, dy$$

$$= \int_1^4 2 - y + \sqrt{y}\, dy$$

$$= \left(2y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}y^{3/2}\right)\Big|_1^4$$

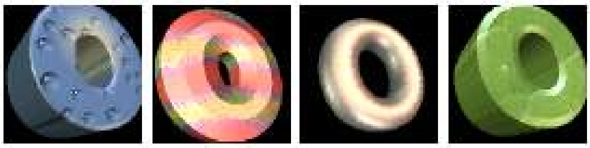
$$= \frac{19}{6} \text{ đơn vị}^2$$

BÀI 3.2.5 THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY



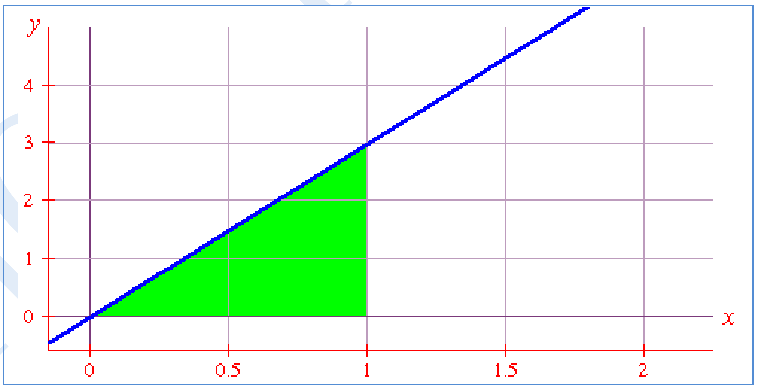
Máy tiện

Nhiều vật thể rắn, đặc biệt là những vật thể được làm từ máy tiện có tiết diện tròn và phần cạnh cong, Trong bài này, ta sẽ tìm thể tích của những vật có hình dạng như vậy bằng tích phân.



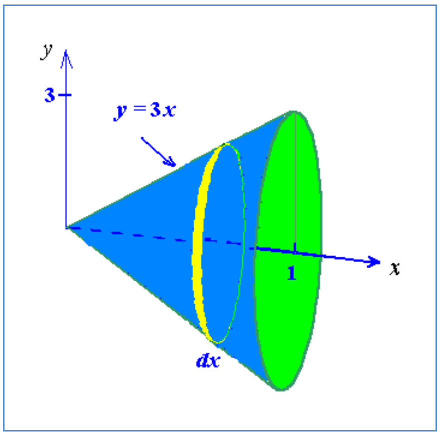
Những sản phẩm từ máy tiện

Ví dụ 1: Hãy quan sát phần hình phẳng được bao bởi đường thẳng $y = 3x$, trục x và đường $x = 1$.



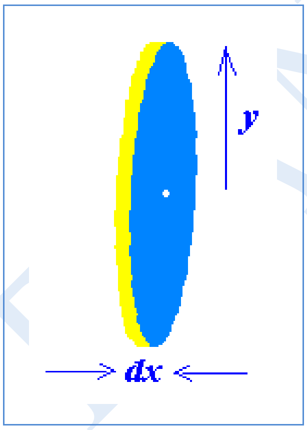
Khi mà vùng tô màu xoay 360° quanh trục x, nó sẽ tạo thành một khối tròn.

Kết qua thu được là hình nón.



I. TÌM THỂ TÍCH BẰNG CÔNG THỨC CHIẾC ĐĨA

Để tính thể tích này, ta có thể lấy từng lát cắt (phần đĩa màu vàng ở hình trên) có bán kính y, độ dày dx.



Công thức tính thể tích hình trụ là:

$$V = \pi r^2 h$$

Vì bán kính $= r = y$ và mỗi chiếc đĩa có độ dày dx, ta thấy rằng thể tích của từng lát cắt sẽ là:

$$V = \pi y^2 \, dx$$

Cộng tất cả thể tích các lát cắt này lại (với giá trị dx vô cùng nhỏ), ta có công thức sau:

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

Điều này có nghĩa:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

với:

+ $y = f(x)$ là phương trình đường cong có phần hình phẳng được xoay.

+ a và b là giới hạn của phần hình phẳng được xoay.

+ dx cho thấy phần hình phẳng được xoay quanh trục x.

Lưu ý: Ta chỉ sử dụng công thức chiếc đĩa (không phải công thức con sò) trong bài này.

Áp dụng công thức tính thể tích cho ví dụ trên, ta được:

$$\text{Thể tích} = \pi \int_a^b y^2\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 (3x)^2\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 9x^2\,dx$$

$$= \pi 3x^3 |_0^1$$

$$= 3\pi \text{ đơn vị}^2$$

Kiểm tra: Liệu công thức này có đúng không? Ta có thể tính thể tích hình nón bằng công thức:

$$\text{Thể tích hình nón} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$= \frac{\pi(3)^2(1)}{(3)}$$

$$= \frac{9\pi}{3}$$

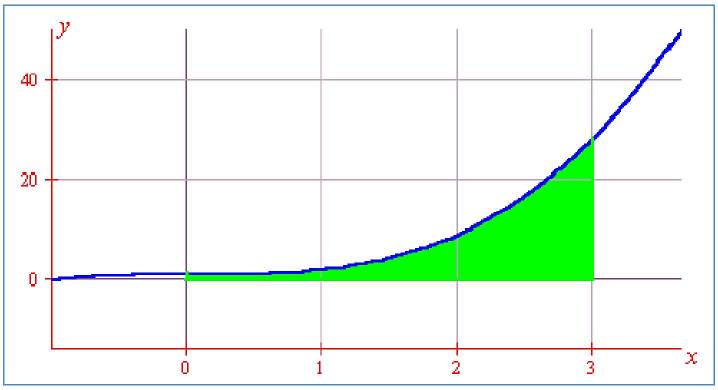
$$= 3\pi \text{ đơn vị}^2$$

Đáp án khớp với công thức chiếc đĩa.

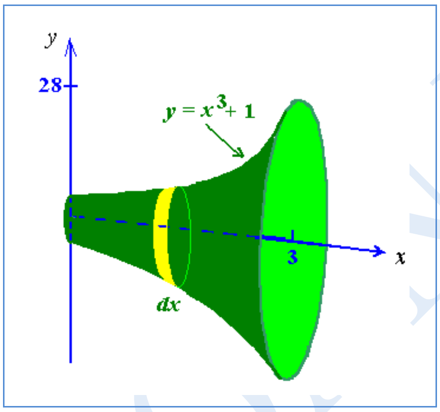
Ví dụ 2: Tìm thể tích nếu hình phẳng được bao bởi đường cong $y = x^3 + 1$, trục x và giới hạn giữa $x = 0$ và $x = 3$ xoay quanh trục x.

Trả lời ví dụ 2

Đây là miền được miêu tả, nằm dưới hàm bậc 3:



Khi mà phần hình phẳng được tô màu xoay 360° quanh trục x, ta đã tạo dựng nên khối tròn.



Áp dụng công thức tính thể tích khối tròn xoay, ta được:

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx$$

$$= \pi \int_0^3 (x^3+1)^2\,dx$$

$$= \pi \int_0^3 x^6 + 2x^3 + 1\,dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{2} + x\right)\Big|_0^3$$

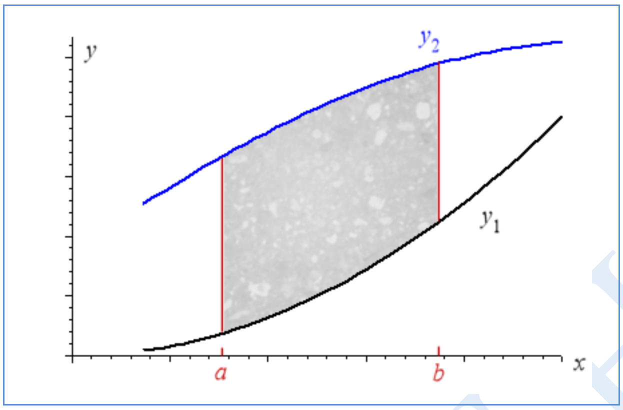
$$= 1\,118.2 \text{ đơn vị}^2$$

II. TÌM THỂ TÍCH KHI XOAY HÌNH PHẲNG BAO BỞI 2 ĐƯỜNG CONG

Nếu ta có hai đường cong y_2 và y_1 bao qunh một hình phẳng nào đó và ta xoay hình phẳng quanh trục x. Khi đó, thể tích hình khối tạo thành được tính bởi công thức:

$$\text{Thể tích} = \pi \int_a^b ((y_2)^2 - (y_1)^2)\, dx$$

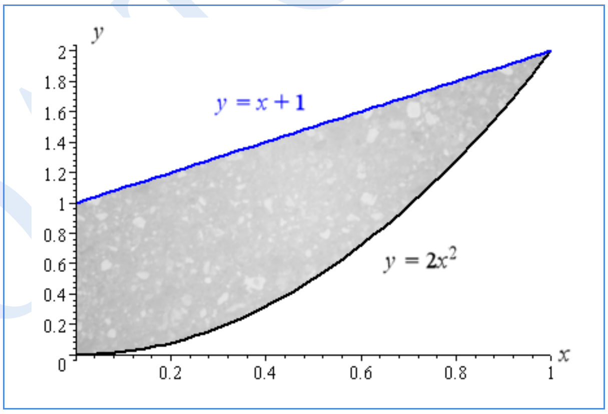
Ở hình tổng quát sau, y_2 có màu xanh và y_1 có màu đen. Giới hạn trên và dưới của miền được xoay có màu đỏ tối: $x = a$ đến $x = b$.



Ví dụ 3: Một chiếc cốc được tạo thành bằng cách xoay miền phẳng giữa $y = 2x^2$ và $y = x + 1$ với $x \geq 0$ quanh trục x. Tìm thể tích vật liệu cần thiết để làm nên chiếc cốc này. Đơn vị đo là cm.

Trả lời ví dụ 3

Ta vẽ các đường cong trên và dưới:



Cận dưới của tích phân là $x = 0$ (vì đề bài có nói $x \geq 0$).

Tiếp theo, ta cần tìm xem 2 đường cong này giao nhau tại điểm nào để xác định cận trên của tích phân.

Giải phương trình sau:

$$2x^2 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-0.5 \end{array}\right.$$

Theo giả thiết thì $x \geq 0$ nên ta nhận kết quả $x = 1$.

Vậy với $y_2 = x + 1$ và $y_1 = 2x^2$, thể tích yêu cầu được tính bởi":

$$\text{Thể tích} = \pi \int_0^1 ((x+1)^2 - (2x^2)^2)\, dx$$

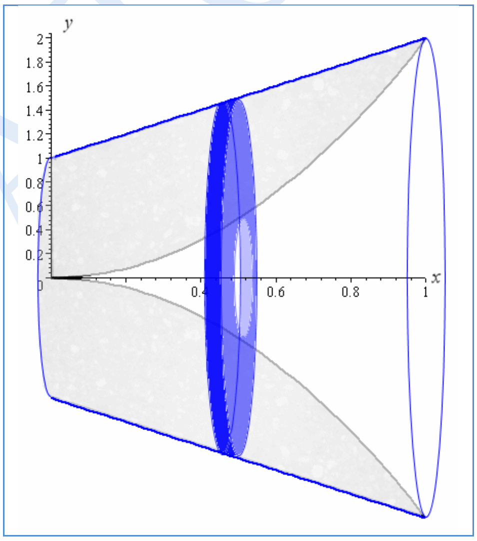
$$= \pi \int_0^1 x^2 + 2x + 1 - 4x^4\, dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x - \frac{4}{5}x^5 \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{23\pi}{15}$$

$$= 4.817\ cm^3$$

Đây là ảnh hình khối mà ta đã tìm được. Trong ảnh này có một "miếng đệm cao su" có bán kính bên ngoài là $y_2 = x + 1$ và bán kính bên trong là $y_1 = 2x^2$.



III. XOAY HÌNH PHẲNG QUANH TRỤC *y*

Khi miền phẳng quay 360° quanh trục y, ta có thể tìm thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng công thức:

$$V = \pi \int_c^d x^2 \, dy$$

Tức:

$$V = \pi \int_c^d \left(f(y)\right)^2 dy$$

Với:

+ $x = f(y)$ là phương trình đường cong biểu diễn theo biến y.

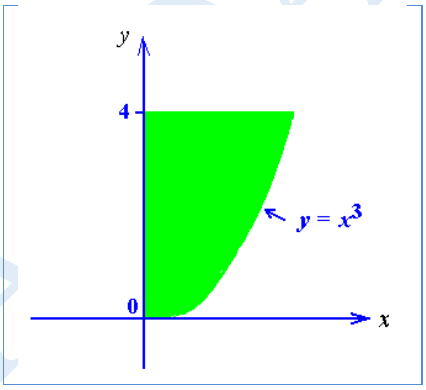
+ c và d là cận trên và dưới của y trong miền phẳng được xoay.

+ dy cho thấy miền phẳng xoay quanh trục y.

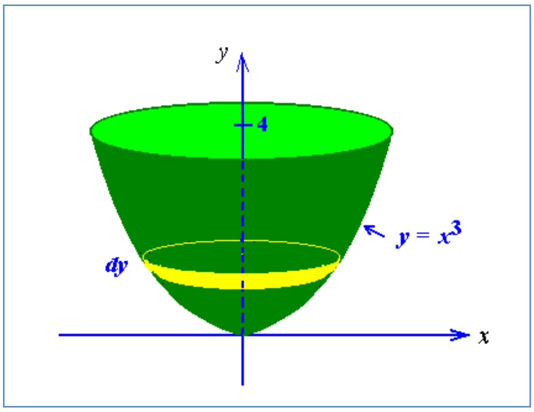
Ví dụ 4: Tìm thể tích khối tròn xoay tạo bởi đường cong $y = x^3$ quanh trục y, giữa $y = 0$ và $y = 4$.

Trả lời ví dụ 4

Đây mà miền parabola ta cần xoay:



Và đây là khối tròn xoay được tạo thành, khối này còn được gọi là khối parabolaoid:



Ta cần biểu diễn x theo y để áp dụng công thức thể tích khối tròn xoay.

Nếu $y = x^3$ thì $x = y^{1/3}$.

Biểu thức yêu cầu x^2, vậy $x^2 = y^{2/3}$.

$$\text{Thể tích} = \pi \int_c^d x^2\, dy$$

$$= \pi \int_0^4 y^{2/3}\, dy$$

$$= \pi \left(\frac{3y^{5/3}}{5} \right) \Bigg|_0^4$$

$$= 19 \text{ đơn vị}^3$$

IV. BÀI TẬP

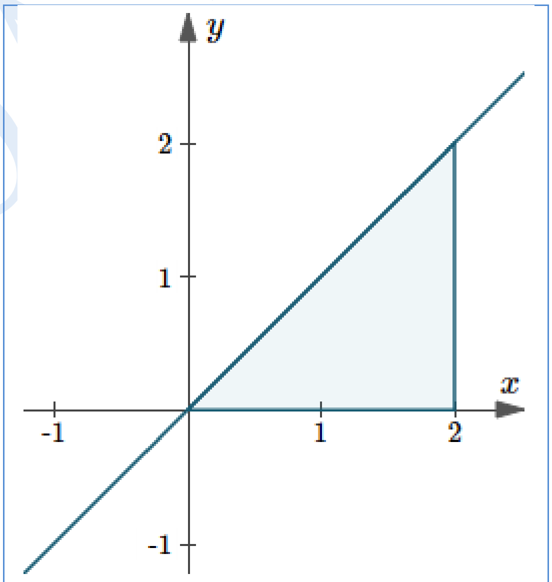
Bạn đọc hãy tự giải các bài sau trước khi xem cách giải.

Tìm thể tích tạo bởi hình phẳng bao bởi đường cong cho trước, xoay quanh một trục cho trước.

1) Đường thẳng $y = x$, giữa $y = 0$ và $x = 2$, xoay quanh trục x.

Trả lời câu 1)

Đây là phần hình phẳng sẽ xuay quanh trục x:



Đồ thị hàm số $y = x$ với phần hình phẳng dưới đường "cong" được làm mờ giữa $x = 0$ và $x = 2$

Ta có thể xác định thể tích sinh ra bằng cách sử dụng công thức tính thể tích khối tròn xoay:

$$\text{Thể tích} = \pi \int_a^b y^2\,dx$$

$$= \pi \int_0^2 (x)^2\,dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2$$

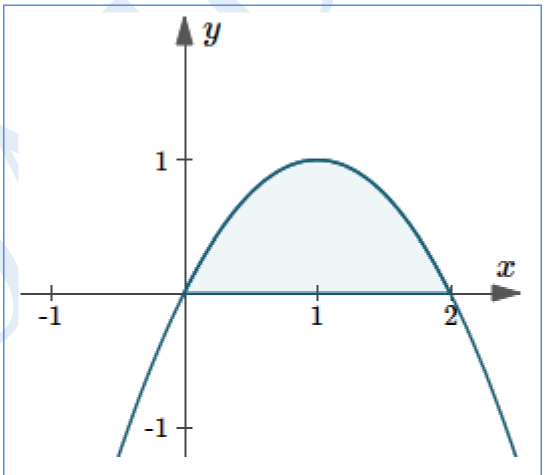
$$= \pi \left(\frac{8}{3}\right) - \pi(0)$$

$$= \frac{8}{3}\pi \text{ đơn vị}^3$$

$$\approx 8.378 \text{ đơn vị}^3$$

2) Đường cong $y = 2x - x^2$ được chắn bởi $y = 0$, xoay quanh trục x.

Trả lời câu 2)



Đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ với phần hình phẳng dưới đường cong được làm mờ giữa $x = 0$ và $x = 2$

Đường thẳng $y = 0$ đơn giản chính là trục x.

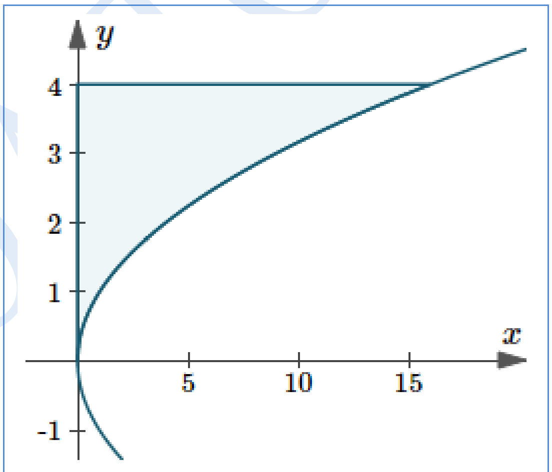
Từ đồ thị, ta có thể thấy cận giới hạn của phần hình phẳng là $x = 0$ và $x = 2$.

Thể tích sinh ra là:

$$\text{Thể tích} = \pi \int_a^b y^2\,dx$$
$$= \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2\,dx$$
$$= \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)\,dx$$
$$= \pi \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{4x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2$$
$$= \pi \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5}\right) - \pi(0)$$
$$= \frac{16}{15}\pi \text{ đơn vị}^3$$
$$\approx 3.351 \text{ đơn vị}^3$$

3) Đường cong $y^2 = x$, chắn bởi $y = 4$ và $x = 0$, xoay quanh trục y.

Trả lời câu 3)



Đồ thị phần hình phẳng bao bởi $y^2 = x, y = 4$ và $x = 0$

Vì $x = y^2$, ta có $x^2 = y^4$.

Ta tính thể tích:

$$\text{Thể tích} = \pi \int_c^d x^2\, dy$$

$$= \pi \int_0^4 y^4\, dy$$

$$= \pi \left(\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^4$$

$$= \pi\left(\frac{1024}{5}\right) - \pi(0)$$

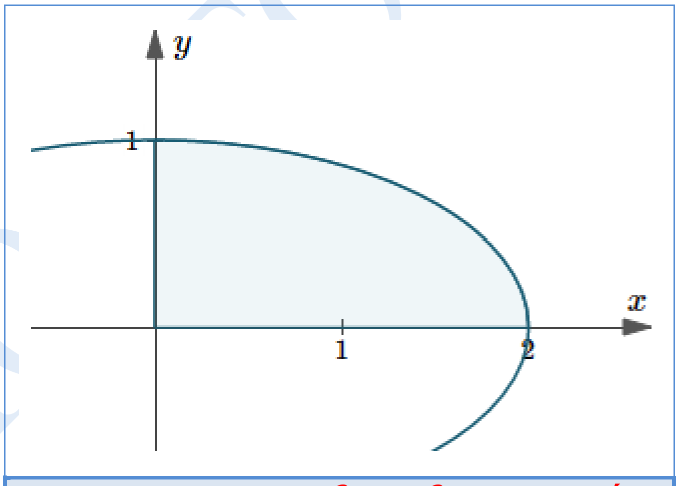
$$= \frac{1024}{5}\pi \text{ đơn vị}^3$$

$$\approx 643.40 \text{ đơn vị}^3$$

4) Đường cong $x^2 + 4y^2 = 4$ ở góc phần tư thứ I, xoay quanh trục y.

Trả lời câu 4)

Ta nhận thấy đường cong có dạng hình ellipse. Câu hỏi chỉ yêu cầu phần hình phẳng ở góc phần tư thứ I.



Đường cong ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$ cho thấy phần hình phẳng được bao bởi đường cong, $x = 0, x = 2$ và trục x

Từ đồ thị, ta thấy giới hạn biên hình phẳng là $y = 0$ và $y = 1$.

Khi đó, ta tính thể tích:

$$\text{Thể tích} = \pi \int_c^d x^2\,dy$$

$$= \pi \int_0^1 (4 - 4y^2)\,dy$$

$$= \pi \left(4y - \frac{4y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \pi \left(4 - \frac{4}{3}\right) - \pi(0)$$

$$= \frac{8\pi}{3} \text{ đơn vị}^3$$

$$\approx 8.378 \text{ đơn vị}^3$$

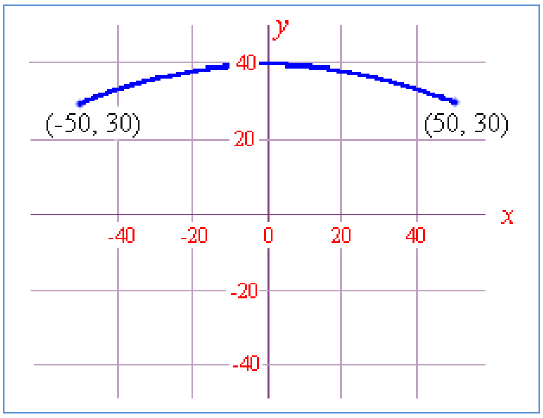
V. ỨNG DỤNG

1) Thể tích thùng rượu

Một thùng rượu có bán kính ở trên là 30 cm và ở giữa là 40 cm. Chiều cao thùng rượu là 1 m. Hỏi thể tích của thùng rượu (đơn vị litre) là bao nhiêu? Cho rằng cạnh bên hông thùng rượu là hình parabola.

Trả lời

Ta sẽ để thùng rượu nằm ngang để thuận lợi trong việc tính toán.



Ta cần tìm phương trình parabola đi qua đỉnh là điểm $(0; 40)$ và qua điểm $(50; 30)$.

Ta dùng công thức:

$$(x-h)^2 = 4a(y-k)$$

Bây giờ $(h; k)$ là $(0; 40)$ nên ta được $x^2 = 4a(y-40)$ và parabola đi qua $(50; 30)$. Vậy.

$$50^2 = 4a(30-40)$$

$$\Leftrightarrow 2\,500 = 4a(-10)$$

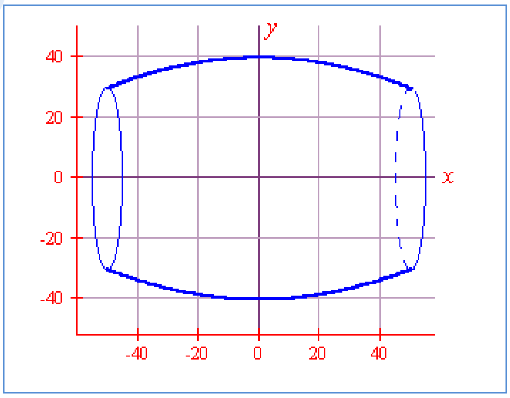
$$\Leftrightarrow 4a = -250$$

Vậy phương trình cạnh thùng rượu là:

$$x^2 = -250(y-40)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x^2}{250} + 40$$

Ta cần tìm thể tích thùng rượu, được tạo thành bằng cách xoay parabola giữa $x = -50$ và $x = 50$ quanh trục x.



Bây giờ ta áp dụng công thức tính thể tích khối tròn xoay:

$$\text{Thể tích} = \pi \int_{a}^{b} y^2\, dx$$

$$= \pi \int_{-50}^{50} \left(-\frac{x^2}{250} + 40\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-50}^{50} \left(\frac{x^4}{62\,500} - \frac{80x^2}{250} + 1\,600\right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{312\,500} - \frac{80x^3}{750} + 1\,600x\right)\Bigg|_{-50}^{50}$$

$$= 425\,162\ cm^3$$

Vậy thùng rượu sẽ trữ được $425.2\ L$.

2) Thể tích quả dưa hấu

Quả dưa hấu có bề mặt ellipse tròn xoay (ellipsoid) với trục lớn dài $28\ cm$ và trục nhỏ dài $25\ cm$. Tìm thể tích quả dưa hấu đấy.

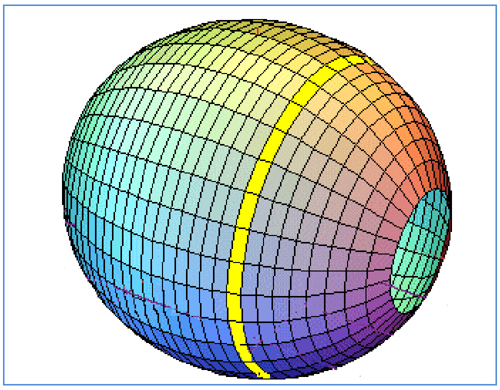
Hướng giải quyết trong lịch sử: Trước khi vi tích phân ra đời, cách để xấp xỉ thể tích quả dưa hấu đó là cắt lát từng miếng (dày khoảng $2\ cm$), tính thể tích từng miếng bằng công thức $V = \pi r^2 h$ sau đó cộng lại.

Một điều thú vị là Archimedes (người nổi tiếng với hành động nhảy ra khỏi bồn tắm, sau đó chạy ra ngoài đường và hét lớn: "Eureka! Tìm ra rồi.") đã sử dụng cách này để tính thể tích khối cầu vào khoảng 200 năm trước Công nguyên. Tuy nhiên, cách trên đã dần bị quên lãng cho đến khi Newton và Leibniz phát triển vi tích phân vào khoảng đầu năm 1700.

Ta sẽ giải quyết bài toán trên bằng cả 2 cách trên:

(i) *Tính thể tích bằng cách của Archimedes.*

Trả lời



Vì quả dưa hấu có dạng đối xứng, ta chỉ tính thể tích trên một nửa quả, sau đó nhân đôi đáp án.

Bằng cách đo đạc thủ công, ta tính được bán kính mỗi lát trên một nửa quả dưa hấu là:

$$0;\ 6.4;\ 8.7;\ 10.3;\ 11.3;\ 12.0;\ 12.4;\ 12.5$$

Giả trị xấp xỉ một nửa thể tích quả dưa hấu có lát cắt dày $2\ cm$ là:

$$V_{\text{nửa}} = \pi \times (6.4^2 + 8.7^2 + 10.3^2 + 11.3^2 + 12^2 + 12.4^2 + 12.5^2)$$
$$= \pi \times 8\,040.44 \times 2$$
$$= 5\,054.4$$

Vậy thể tích của toàn bộ quả dưa hấu là:

$$5\,054.4 \times 2 = 10\,109\ cm^3 = 10.1\ L$$

Ở câu hỏi tiếp theo, ta sẽ tìm cách tính chính xác thể tích quả dưa hấu.

(ii) *Tính chính xác thể tích quả dưa hấu bằng tích phân:*

Trả lời

Ta biết quả dưa hấu có dạng ellipse tròn xoay, ta cần tìm phương trình ellipse trong tọa độ 2 chiều có trục lớn là $28\ cm$, trục nhỏ là $25\ cm$.

Ta dùng công thức:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

với a là nửa trục lớn và b là nửa trục nhỏ.

Với công thích tính thể tích, ta cần biểu diễn công thức theo y^2 và điều này rất dễ để thực hiện.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\Longrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
$$\Longrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

Vì $a = 14$ và $b = 12.5$, ta được:

$$y^2 = \frac{12.5^2}{14^2}(14^2 - x^2) = 0.797(196 - x^2)$$

Lưu ý: a và b dùng trong công thức ellipse không phải a và b trong công thức tính tích phân. Hai điều này hòa toàn khác nhau.

Có phương trình ellipse, ta áp dụng tích phân để tính thể tích. (Một lần nữa ta tính thể tích nửa quả dưa hấu, sau đó nhân đôi đáp án).

$$\begin{aligned} V_{\text{nửa}} &= \pi \int_0^{14} y^2\, dx \\ &= \pi \int_0^{14} 0.797(196 - x^2)\, dx \\ &= 0.797\pi \int_0^{14} 196 - x^2\, dx \\ &= 2.504\left(196x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{14} \\ &= 4\,580.65\ cm^3 \end{aligned}$$

Vậy tổng thể tích quả dưa hấu là $2 \cdot 4\,580.65 = 9\,161\ cm^3$ hay $9.161\ L$. Đáp án này gần giống với đáp án theo cách của Archimedes.

BÀI 3.2.6 TRỌNG TÂM BỀ MẶT

I. VẤN ĐỀ ĐIỂN HÌNH (CẠNH THẲNG)

Trong cấu trúc xây dựng tilt – slab, ta có bức tường bê tông (với cửa chính và cửa sổ rời) và ta cần đặt bức tường này vào đúng chỗ. Chúng ta không muốn bức tường bị nứt khi đặt xuống, vậy ta cần biết đến trọng trọng tâm của bức tường. Làm cách nào ta có thể tìm được trọng tâm của một vật có hình thù không bằng phẳng?

Cấu trúc tilt – slab (hay tilt – wall, tilt – up)

Trong bài này ta sẽ nghiên cứu cách tìm trọng tâm của miền phẳng có cạnh thẳng, sau đó ta sẽ dùng tích phân áp dụng cho cạnh cong.

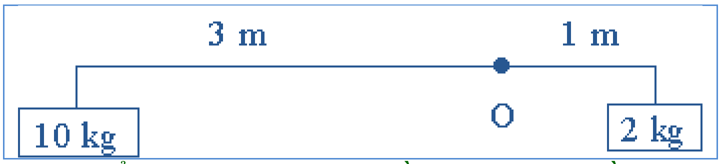
II. MOMENT

Moment của một vật có tác dụng ước lượng khuynh hướng xoay quanh một điểm của vật thể. Hiển nhiên, vật có khối lượng càng lớn (và khoảng cách so với điểm càng xa), khuynh hướng xoay sẽ lớn.

Công thức tính moment:

$$\text{Moment} = \text{khối lượng} \cdot \text{khoảng cách từ một điểm}$$

Ví dụ 1



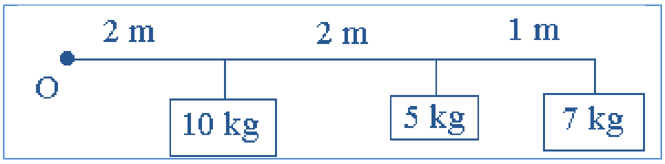
Trong trường hợp này, sẽ có tổng moment ở O (chiều dương là chiều kim đồng hồ).

$$M = 2 \cdot 1 - 10 \cdot 3 = -28\, kg \cdot m$$

III. TRỌNG TÂM

Bây giờ ta sẽ đi tìm trọng tâm của hệ và điều này sẽ giúp ta đưa đến nhiều kết quả tổng quát.

Ví dụ 2: Ta có 3 vật có khối lượng là $10\ kg;\ 5\ kg$ và $7\ kg$, vật trước cách vật sau một khoảng lần lượt là $2\ m;\ 2\ m$ và $1\ m$ như hình sau:



Ta thay thế 3 vật trên bằng 1 vật sao cho vật đó tạo ra moment tương đương với 3 vật kia. Vậy ta nên đặt vật ấy ở đâu?

Trả lời ví dụ 2

Tổng moment:

$$10 \times 2 + 5 \times 4 + 7 \times 5 = 75\ kg.m$$

Nếu ta cộng hết khối lượng các khối, ta được khối lượng tổng:

$$10 + 5 + 7 = 22\ kg$$

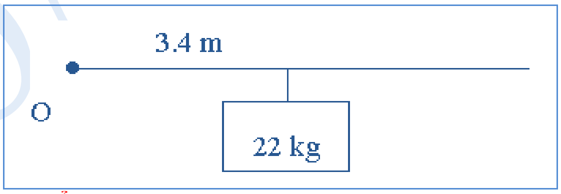
Để được giá trị moment tương đương, ta cần:

$$22 \times \bar{d} = 75$$

Với $\bar{d}$ là khoảng cách từ trọng tâm đến tâm quay. Giải phương trình trên, ta được:

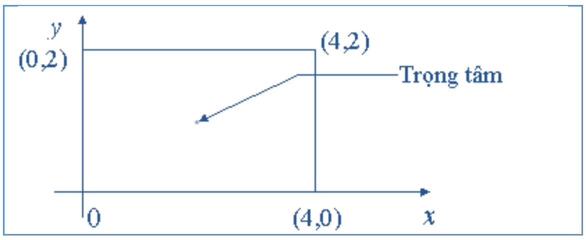
$$\bar{d} = \frac{75}{22} \approx 3.4\ m$$

Vậy hệ tương đương (với vật có khối lượng $22\ kg$) là:



IV. TRỌNG TÂM HÌNH PHẲNG

Hình chữ nhật:



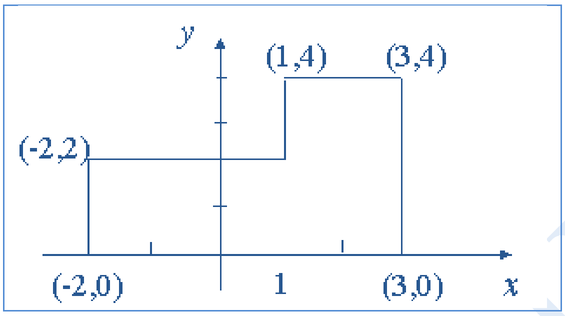
Trọng tâm nằm ngay giữa hình chữ nhật, tức điểm $(2;\ 1)$.

Một số hình phức tạp:

+ Ta chia hình phức tạp ra thành các hình chữ nhật và tìm $\bar{x}$ (giá trị hoành độ x của trọng tâm) và $\bar{y}$ (giá trị tung độ y của trọng tâm) bằng cách lấy moment trên 2 trục này một cách độc lập.

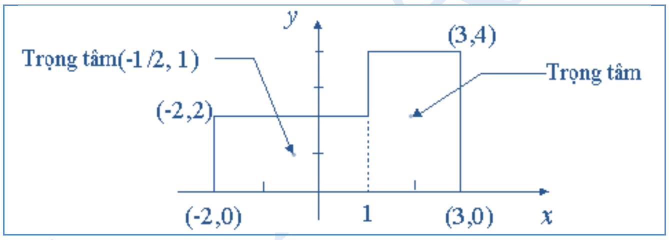
+ Vì ta có hình phẳng nên ta có thể dùng diện tích để tính moment.

Ví dụ 3: Tìm trọng tâm của hình sau:



Trả lời ví dụ 3

Ta chia miền phẳng thành 2 hình chữ nhật và giả sử khối lượng của hình chữ nhật tập trung ở giữa.



Hình chữ nhật trái:

$$\text{Diện tích} = 3 \times 2 = 6 \text{ đơn vị}^2$$

Hình chữ nhật phải:

$$\text{Diện tích} = 2 \times 4 = 8 \text{ đơn vị}^2$$

Lấy moment theo trục y, ta được:

$$6\left(-\frac{1}{2}\right) + 8(2) = (6+8)\bar{x}$$
$$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{13}{14}$$

Tương tự với trục x:

$$6(1) + 8(2) = (6+8)\bar{y}$$
$$\Leftrightarrow \bar{y} = \frac{22}{14}$$

Vậy trọng tâm nằm ở $\left(\frac{13}{14};\frac{22}{14}\right)$.

Ta có thể sử dụng quy trình này để giải quyết vấn đề cấu trúc tilt – slab đã đề cập ở đầu bài.

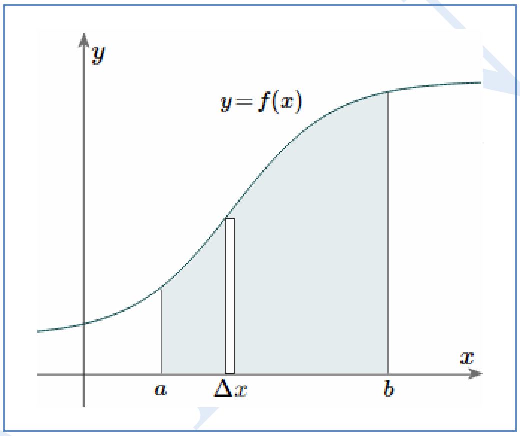
Một cách tổng quát, ta có thể nói:

$$\bar{x} = \frac{\text{Tổng moment theo hướng } x}{\text{Tổng diện tích}}$$
$$\bar{y} = \frac{\text{Tổng moment theo hướng } y}{\text{Tổng diện tích}}$$

Ý tưởng này sẽ được dùng rộng rãi hơn ở phần sau.

V. TRỌNG TÂM CỦA MIỀN PHẲNG CONG

Hãy tiếp cận trường hợp dễ nhất, ta sẽ tìm trọng tâm của miền phẳng xác định bởi hàm $f(x)$, đường thẳng đứng $x = a$ và $x = b$ như hình dưới đây:



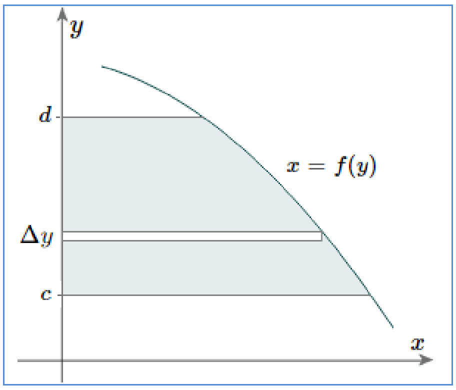
Để tìm trọng tâm, ta sử dụng ý tưởng cơ bản mà ta đã áp dụng cho trường hợp cạnh thẳng. Hình chữ nhật trong hình cách trục y một đoạn có độ dài x đơn vị, chiều rộng Δx (sẽ trở thành dx khi sử dụng tích phân) và chiều cao $y = f(x)$.

Tổng quát hóa trường hợp miền phẳng hình chữ nhật ở trên, ta nhân 3 giá trị x; Δx và $f(x)$ sẽ cho ta diện tích hình chữ nhật mỏng nhân với khoảng cách đến trục x, sau đó cộng chúng lại. Nếu ta lấy một lượng vô cùng nhỏ những hình mỏng, ta được giá trị hoành độ x của trọng tâm bằng cách áp dụng tổng moment theo chiều x bằng công thức:

$$\bar{x} = \frac{\text{tổng moment}}{\text{tổng diện tích}} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)\,dx$$

Và, mô tả moment theo chiều y trên trục x và viết lại biểu thức theo y, ta được:

$$\bar{y} = \frac{\text{tổng moment}}{\text{tổng diện tích}} = \frac{1}{A}\int_c^d y\,f(y)\,dy$$



Hãy nhớ rằng lúc này ta tích tích phân theo y, và khoảng cách của hình chữ nhật ở hình trên đến trục x là y đơn vị. Đồng thời cận dưới và trên của tích phân lúc này là c và d, hiện ở trục y.

Đương nhiên, ta cần sử dụng nhiều hình chữ nhật mỏng.

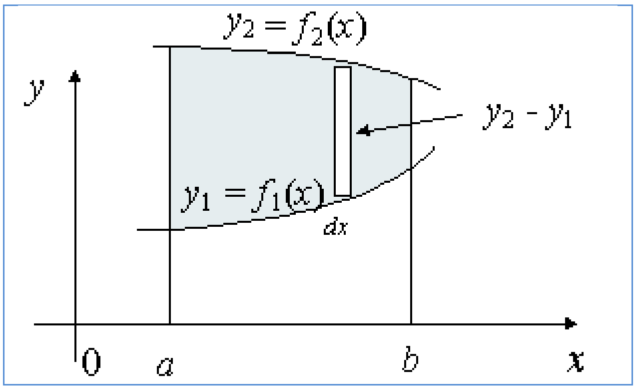
Công thức so le: Tùy theo hàm số, công thức này sẽ giúp ta tính tọa độ y dễ dàng khi mô tả moment theo hướng x (Hãy nhớ đến "dx" trong tích phân, cận trên và dưới trên trục x khi sử dụng công thức so le).

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\text{tổng moment}}{\text{tổng diện tích}}\\ &= \frac{1}{A}\int_a^b \frac{f(x)}{2} \times f(x)\,dx\\ &= \frac{1}{A}\int_a^b \frac{\left(f(x)\right)^2}{2}\,dx\end{aligned}$$

Điều này đúng khi ta có hình chữ nhật rất mỏng (độ rộng dx), trọng tâm sẽ bằng một nửa khoảng cách từ đầu đến đáy của hình mỏng.

Một hướng triển khai của biểu thức thứ hai này đó là không cần thiết phải biểu diễn lại hàm số theo y.

VI. TRỌNG TÂM MIỀN PHẲNG BAO BỞI HAI ĐƯỜNG CONG



Ta mở rộng trường hợp đơn giản ở trên. Hình chữ nhật mỏng ở hình trên có chiều rộng Δx và chiều cao $y_2 - y_1$, vậy tổng moment theo hướng x trên tổng diện tích là:

$$\bar{x} = \frac{\text{tổng moment}}{\text{tổng diện tích}} = \frac{1}{A}\int_a^b x\,(y_2 - y_1)\,dx$$

Với tọa độ y, có hai cách để ta xử lý.

Cách 1: Ta lấy moment trên trục y, khi đó ta cần biểu diễn lại biểu thức x_2 và x_1 là hàm số theo y.

$$\bar{y} = \frac{\text{tổng moment}}{\text{tổng diện tích}} = \frac{1}{A}\int_c^d y\,(x_2 - x_1)\,dy$$

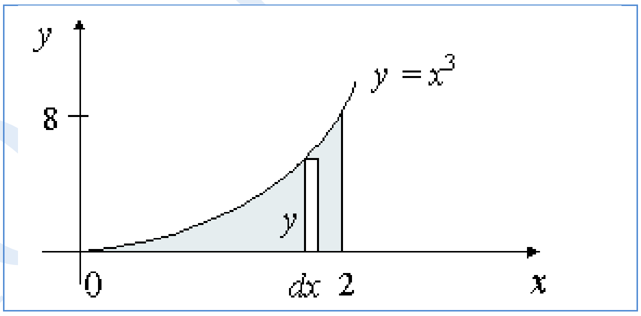
Cách 2: Ta giữ mọi thứ theo x bằng cách mở rộng "*công thức so le*" ở trên.

$$\bar{y} = \frac{\text{tổng moment}}{\text{tổng diện tích}} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{(y_2)^2 - (y_1)^2}{2}\,dx$$

Ví dụ 4: Tìm trọng tâm mặt phẳng bao bởi $y = x^3$; $x = 2$ và trục x.

Trả lời ví dụ 4

Đây là miền phẳng được mô tả:



Trong trường hợp này, $y = f(x) = x^3; a = 0;\ b = 2$.

Đầu tiên, ta tính diện tích phần được tô màu:

$$A = \int_0^2 x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = 4$$

Tiếp theo, sử dụng công thức tính tọa độ x của trọng tâm, ta được:

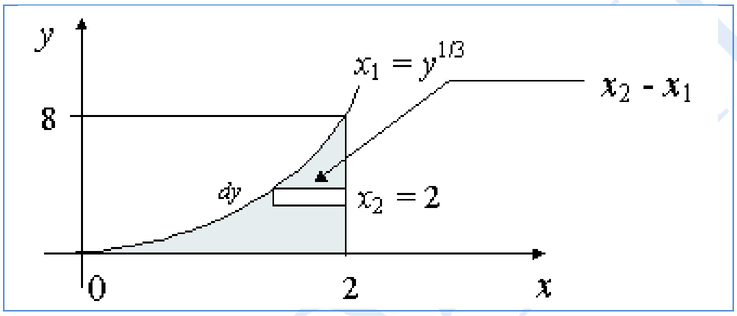
$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x\,f(x)\,dx$$

$$\bar{x} = \frac{1}{4}\int_0^4 x^4\,dx$$

$$\bar{x} = \frac{1}{4}\left(\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^5$$

$$\bar{x} = 1.6$$

Bây giờ, để tìm tọa độ y, ta cần tìm:



$x_2 = 2$ (điều này đã được nói trong đề bài).

$x_1 = y^{1/3}$ (đây là biến trong bài).

$c = 0;\ d = 8.$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_c^d y\,(x_2 - x_1)\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^8 y\,(2 - y^{1/3})\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^8 2y - y^{4/3}\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\left(y^2 - \frac{3y^{7/3}}{7}\right)\Big|_0^8$$

$$= 2.29$$

Vậy trọng tâm của miền phẳng có tọa độ $(1.6;\ 2.29)$.

VII. CÔNG THỨC SO LE TÍNH GIÁ TRỊ TUNG ĐỘ y

Sử dụng công thức so le, ta có thể tính giá trị tung độ y của trọng tâm như sau:

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{\left(f(x)\right)^2}{2}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{(x^3)^2}{2}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{x^6}{2}dx$$

$$= \frac{1}{56}(x^7)|_0^2$$

$$= 2.29$$

Ở ví dụ này, công thức so le giúp ta tính toán dễ dàng hơn, nhưng tiếc là không phải trường hợp nào cũng vậy.

Chú thích:

Cấu trúc xây dựng tilt – slab là một dạng kỹ thuật xây dựng, sử dụng các tấm bê tông có khoét vị trí đặt cửa sổ, cửa chính,… giúp cho việc xây dựng trở nên nhanh chóng. (xem thêm tại http://en.wikipedia.org/wiki/Tilt_up).

BÀI 3.2.7 MOMENT QUÁN TÍNH

Moment quán tính là giá trị đo lường sự chống lại thay đổi chuyển động của một vật thể quay.

Moment quán tính của một vật có khối lượng m quay quanh một điểm cho trước được tính bằng công thức:

$$\text{Moment quán tính} = md^2$$

với d là bán kính quay.

I. QUÁN TÍNH CHO HỆ NHIỀU VẬT

Nếu một nhóm các vật có khối lượng là $m_1;\ m_2;\ m_3;\ \dots;m_n$ quay quanh một điểm với khoảng cách khác nhau lần lượt là $d_1;\ d_2;\ d_3;\dots;\ d_n$, khi đó moment quán tính I xác định bởi:

$$I = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + m_3 d_3^3 + \cdots + m_n d_n^n$$

Nếu ta đặt tất cả vật này vào cùng một điểm (cách điểm quay một khoảng R) thì:

$$d_1 = d_2 = d_3 = \cdots = d_n = R$$

và ta có thể viết,

$$I = (m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n)R^2$$

R được gọi là bán kính hồi chuyển.

Ví dụ 1: Tìm moment quán tính và bán kính hồi chuyển tại điểm góc tọa độ $(0, 0)$ với hệ vật có tọa độ và khối lượng cho trong bảng sau:

Khối lượng	6	5	9	2
Điểm	$(-3;0)$	$(-2;\ 0)$	$(1;\ 0)$	$(8;\ 0)$

Trả lời ví dụ 1

Moment quán tính có giá trị:

$$I = 6(-3)^2 + 5(-2)^2 + 9(1)^2 + 2(8)^2$$

$$I = 211$$

Để tìm R, ta dùng:

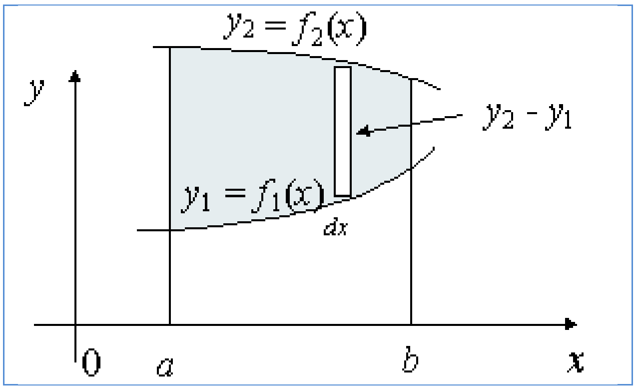
$$I = (m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n)R^2$$

$$211 = (6 + 5 + 9 + 2)R^2$$

Vậy $R \approx 3.097$.

Điều đó có nghĩa một vật nặng 22 đơn vị, đặt tại vị trí $(3.1;\ 0)$ sẽ có cùng moment quán tính với 4 vật trên.

II. MOMENT QUÁN TÍNH CHO MIỀN PHẲNG



Ta muốn tìm moment quán tính I_y ở miền phẳng trên xoay quanh trục y.

Mỗi hình chữ nhật mỏng sẽ có độ rộng dx và chiều cao $y_2 - y_1$, vậy diện tích của chúng là $(y_2 - y_1)\,dx$.

Nếu mỗi đơn vị diện tích có khối lượng k thì khối lượng hình chữ nhật là $k(y_2 - y_1)\,dx$.

Moment quán tính mỗi hình chữ nhật là $(k(y_2 - y_1)\,dx)x^2$ vì mỗi hình chữ nhật cách trục y một khoảng có độ dài x đơn vị.

Ta có thể cộng tất cả moment quán tính của mỗi hình chữ nhật nhỏ lại để tính moment quán tính I_y bằng tích phân:

$$I_y = k\int_a^b x^2(y_2 - y_1)\,dx$$

Sử dụng quy trình tương tự ta đã áp dụng khi giải quyết cho hệ nhiều vật, bán kính hồi chuyển R_y được tính bởi công thức:

$$R_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}}$$

với m là khối lượng của miền phẳng đó.

Ví dụ 2: Xét góc phần tư thứ nhất bao bởi đường cong:

$$y = 1 - x^2$$

Tìm:

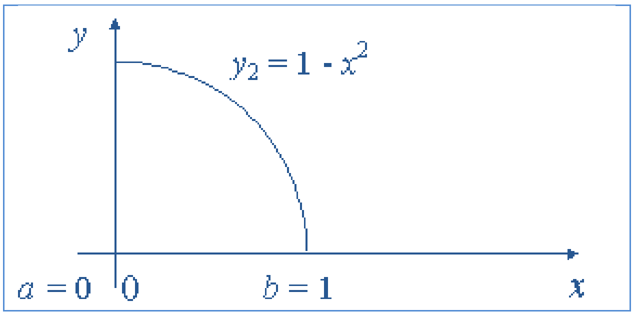
+ Moment quán tính ứng với trục y. (I_y).

+ Khối lượng miền phẳng.

+ Tìm bán kính hồi chuyển.

Trả lời ví dụ 2

Đương nhiên, đầu tiên ta vẽ hình trước:



Ở đây, $y_2 = 1 - x^2$ và $y_1 = 0, a = 0$ và $b = 1$.

Tìm I_y:

$$I_y = k\int_a^b x^2(y_2 - y_1)\,dx$$

$$= k\int_0^1 x^2\big((1-x^2)-(0)\big)\,dx$$

$$= k\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx$$

$$= k\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2k}{15}$$

Khối lượng miền phẳng m:

Bây giờ $m = kA$, với A là diện tích miền phẳng.

Bây giờ,

$$A = \int_0^1 (1 - x^2)\,dx$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}$$

Vậy $m = kA = \frac{2k}{3}$.

Bán kính hồi chuyển:

$$R_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{2k}{15}}{\frac{2k}{3}}} = \sqrt{\frac{1}{5}} \approx 0.447$$

Điều này có nghĩa nếu một vật có khối lượng là $\frac{2k}{3}$ được đặt cách trục y một khoảng 0.447 đơn vị thì nó có cùng moment quán tính với hình phẳng ban đầu.

Lưu ý: Khi quay quanh trục x, công thức trở thành:

$$I_x = k\int_c^d y^2(x_2 - x_1)\,dy$$

Và,

$$R_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}}$$

BÀI 3.2.8 CÔNG SINH RA BỞI LỰC BIẾN THIÊN

Công W sinh ra bởi lực F không đổi tác động vào một vật làm vật đó chuyển động một khoảng d được xác định bởi công thức:

$$W = F \times d$$

Ví dụ: Một trái táo có trọng lượng 1 N đặt trên bàn. Nếu bạn nhấc trái táo này lên đến độ cao 1 m so với mặt bàn, bạn đã thực hiện một công xấp xỉ 1 Newton met (Nm).

I. CÔNG SINH RA BỞI LỰC BIẾN THIÊN

Nếu lực là một giá trị biến thiên (như nén lò xo), ta cần dùng tích phân để tính công sinh ra.

Nếu lực xác định bởi hàm $F(x)$ thì công sinh ra theo trục x từ a đến b là:

$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

II. ĐỊNH LUẬT HOOKE CHO LÒ XO

Lực F dùng để kéo căng hay nén lò xo đi một khoảng x đơn vị so với trạng thái ban đầu của lò xo có tỉ lệ với x.

$$F = kx$$

Ta có thể xác định hằng số lò xo k bằng cách ứng với mỗi lò xo, ta quan sát tác động của lực làm lò xo bị kéo căng.

Ví dụ 1

a) Tìm công sinh ra của lò xo khi bạn nén lò xo đang ở trạng thái tự nhiên dài 1 m còn 0.75 m nếu hằng số lò xo là $k = 16\ N/m$.

Trả lời ví dụ 1 câu a)

$$F = 16x$$

Vậy:

$$\text{Công} = \int_0^{0.25} 16x\,dx$$

$$= 8x^2|_0^{0.25}$$

$$= 0.5\ Nm$$

b) Công sinh ra là bao nhiêu nếu ta nén lò xo thêm 30 cm?

Trả lời ví dụ 1 câu b)

$$\text{Công} = \int_{0.25}^{0.55} 16x\,dx$$

$$= 8x^2|_{0.25}^{0.55}$$

$$= 1.92\ Nm$$

Chú ý: Với lò xo,

$$\int_a^b F(x)\,dx$$

yêu cầu a và b là khoảng cách tính từ trạng thái tự nhiên của lò xo.

Ví dụ 2: Một lực 1 200 N nén lò xo từ chiều dài tự nhiên là 18 cm xuống còn 16 cm. Hỏi công sinh ra là bao nhiêu nếu ta tiếp tục nén lò xo từ 16 cm xuống 14 cm?

Trả lời ví dụ 2

Đầu tiên ta sẽ xác định hằng số lò xo (theo đơn vị cm).

$$F = kx$$

Vậy $1\,200 = k(2)$.

Vậy $k = 600\ N/cm$.

Vậy trong trường hợp này,

$$F = 600x$$

Vậy công sinh ra xác định bởi:

$$\text{Công} = \int_2^4 600x\,dx$$

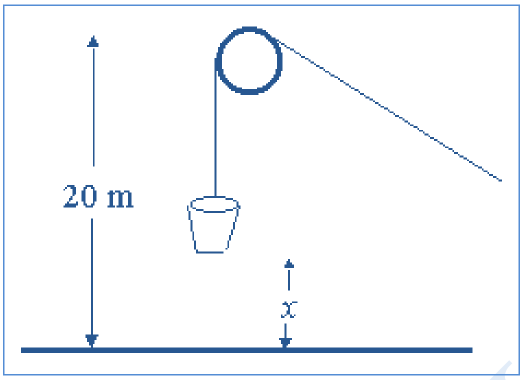
$$= 300x^2|_2^4$$

$$= 3\,600\ N \cdot cm$$

Ví dụ 3: Một xô nước bị rỉ có trọng lượng 5 N được nâng lên không trung 20 m với tốc độ cố định. Sợ dây thừng nặng $0.08\ N \cdot m^{-1}$. Ban đầu xô nước có 2 N nước và rỉ ra với tốc độ không đổi. Khi nâng xô nước lên đỉnh thì nó hết nhỏ giọt. Hỏi công sinh ra khi:

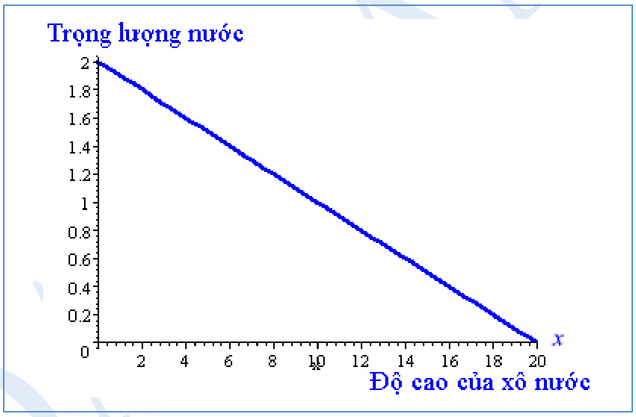
a) Bỏ qua trọng lượng xô nước.

Trả lời ví dụ 3 câu a)



Lực cần thiết để nâng xô nước lên chính là trọng lượng của nước.

Khi xô nước cách mặt đất một đoạn x đơn vị, biểu thức trọng lượng nước được xác định bằng đồ thị:



Vậy, sử dụng $y = mx + c$, ta được độ dốc là:

$$m = -\frac{1}{10}$$

và giao điểm với trục y là $c = 2$.

Vậy ta có thể thiết lập hàm số trọng lượng ứng với chiều cao x như sau:

$$F(x) = -\frac{x}{10} + 2$$

Khi đó,

$$\text{Công} = \int_a^b F(x)\,dx$$

$$= \int_0^{20} \left(-\frac{x}{10} + 2\right) dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{20} + 2x\right)\Bigg|_0^{20}$$

$$= 20\ N \cdot m\ (20\ \text{Joule})$$

Ngoài ra, ta có thể viết hàm số theo cách sau:

$$F(x) = \underbrace{2}_{\text{Trọng lượng ban đầu của nước}}\Big(\underbrace{\frac{20-x}{20}}_{\text{Tỉ lệ còn lại ở độ cao } x}\Big) = \left(2 - \frac{x}{10}\right)\ \text{N}$$

b) Tính cả trọng lượng xô nước.

Trả lời ví dụ 3 câu b)

Với xô nước:

$$W = Fd$$

$$= 5 \cdot 20$$

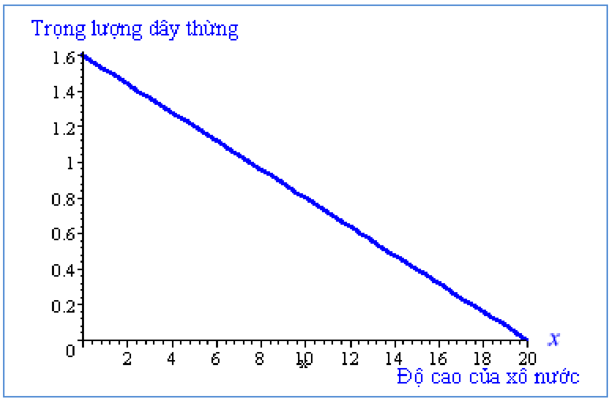
$$= 100\ N \cdot m$$

Vậy tổng công $= 20 + 100 = 120$ Nm.

c) Tính trọng lượng nước, trọng lượng xô nước và trọng lượng dây thừng.

Trả lời ví dụ 3 câu c)

Trọng lượng dây thừng ở độ cao x là:



$$F(x) = 0.08(-x + 20)$$

Công sinh ra của sợi dây là:

$$\int_0^{20} 0.08(-x + 20)\,dx$$

$$= 0.08\left(-\frac{x^2}{2} + 20x\right)\Big|_0^{20}$$

$$= 16\ N \cdot m$$

Vậy tổng công sinh ra của nước, xô, sợ dây là:

$$W = 20 + 100 + 16\ Nm = 136\ Nm \text{ (hay } 136\ J)$$

BÀI 3.2.9 ĐIỆN TÍCH

Lực giữa hai điện tích tỉ lệ thuận với tích điện tích của chúng và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa chúng.

Vậy ta có thể viết:

$$f(x) = \frac{kq_1q_2}{x^2}$$

với q_1 và q_2 tính theo đơn vị Coulomb (C), x tính theo metre, lực tính theo Newton và k là hằng số có giá trị $k = 9 \cdot 10^9$.

Điều này cho thấy công sinh ra khi 2 hạt điệt tích di chuyển gần lại nhau (hoặc cách ra xa nhau) là:

$$\text{Công} = \int_a^b \frac{kq_1q_2}{x^2} dx$$

Ví dụ: Một hạt electron có điện tích âm là $1.6 \cdot 10^{-19}\ C$. Hỏi công sinh ra là bao nhiêu nếu ta tách 2 hạt electron từ 1 pm đến 4 pm?

Trả lời

Nhắc lại: "pm" là đơn vị đo pico-metre, hay 10^{-12} metre.

Trong ví dụ này,

$$\begin{aligned} a &= 1 \times 10^{-12}\ m \\ b &= 4 \times 10^{-12}\ m \\ k &= 9 \cdot 10^9 \\ q_1 &= q_2 = 1.6 \cdot 10^{-19}\ C \end{aligned}$$

Vậy ta được:

$$\begin{aligned} \text{Công} &= \int_a^b \frac{kq_1q_2}{x^2} dx \\ &= \int_{1\times10^{-12}}^{4\times10^{-12}} \frac{(9 \cdot 10^9)(-1.6 \cdot 10^{-19})^2}{x^2} dx \\ &= (2.304 \cdot 10^{-28}) \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1\cdot10^{-12}}^{4\cdot10^{-12}} \\ &= 1.728 \cdot 10^{-16}\ J \end{aligned}$$

BÀI 3.2.10 GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Giá trị trung bình của hàm số $y = f(x)$ từ $x = a$ đến $x = b$ xác định bởi công thức:

$$y_{\text{trung bình}} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Tại sao? Nếu như đây là lần đầu bạn gặp công thức này, bạn hãy suy nghĩ xem công thức này đến từ đâu và sử dụng nó như thế nào.

Gợi ý: Làm sao để tìm được giá trị trung bình của một tập số nào đó? Bản chất của việc tìm tích phân là gì? Ký hiệu tích phân có ý nghĩa như thế nào?

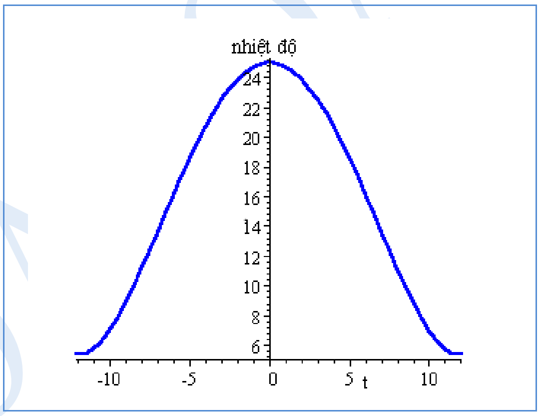
Ví dụ: Nhiệt độ T (tính theo $°C$) ghi nhận trong một ngày thỏa đường cong sau:

$$T = 0.001t^4 - 0.28t^2 + 25$$

với t là giờ, được tính từ lúc giữa trưa $(-12 \le t \le 12)$. Hỏi nhiệt độ trung bình của ngày hôm đó là bao nhiêu?

Trả lời

Đầu tiên, ta vẽ đồ thị, từ đó ta có thể dự đoán rằng giá trị trung bình sẽ nằm trong khoảng 14 đến 16 độ:



$$y_{\text{trung bình}} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

$$= \frac{\int_{-12}^{12}(0.001t^4 - 0.28t^2 + 25)\,dx}{12-(-12)}$$

$$= \frac{1}{24}\left(\frac{0.001t^5}{5} - \frac{0.28t^3}{3} + 25t\right)\Bigg|_{-12}^{12}$$

$$= 15.7°C$$

Câu hỏi: Những vấn đề sau có tính chất gì chung?

+ Giá trị trung bình của hàm số.

+ Diện tích dưới đường cong.

+ Túi khí.

+ Vụ tai nạn xe thảm khốc nhất lịch sử.

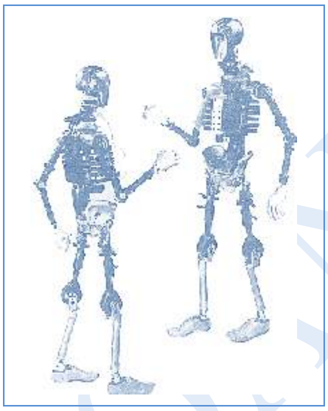
+ Võ sĩ quyền anh.

Tất cả sẽ được giải đáp trong bài tiếp theo là "*Tiêu chuẩn chấn thương đầu*".

BÀI 3.2.11 TIÊU CHUẨN CHẤN THƯƠNG ĐẦU (HIC): CHỈ SỐ NGHIÊM TRỌNG

Trong bài này ta sẽ thấy một số ví dụ của giá trị trung bình của hàm số. Mục tiêu của chúng ta sẽ xác định được tiêu chuẩn chấn thương đầu, một đại lượng nhằm đo lường mức độ hư hại của đầu.

Vào những năm 1950, xe hơi còn được biết đến như cỗ máy giết người. Vào lúc đó xe hơi chưa được trang bị túi khí, dây đai an toàn, hệ thống chống bó phanh, vùng chịu lực hay tay nắm bằng nhựa. Vào những năm 1960 đến 1970, Ralph Nader đã yêu cầu các nhà sản xuất xe hơi phải sản xuất ra những chiếc xe an toàn hơn và điều này đã làm giảm đi lượng tai nạn giao thông.

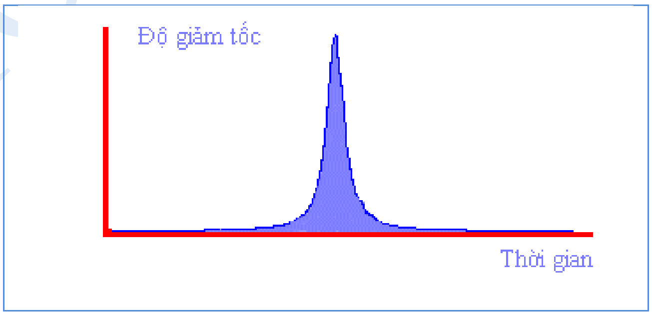


I. PHANH XE BÌNH THƯỜNG

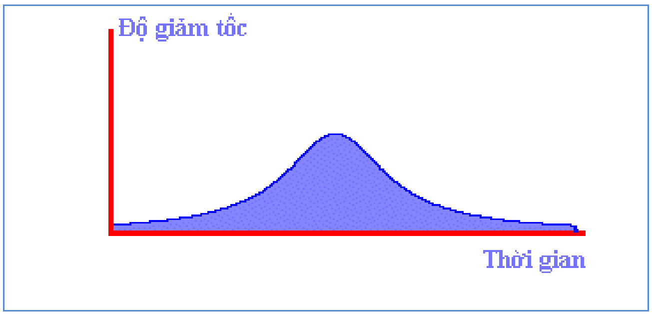
Phanh xe bình thường của chiếc xe hơi đi đường là 10 m/s^2 (hay 1 g).

Phanh xe bình thường của chiếc xe đua là 50 m/s^2 (hay 5 g). Điều này tùy thuộc vào kiểu khí động học và vỏ xe lớn làm bằng loại cao su đặc biệt.

Khi ta dừng xe, độ giảm tốc có thể xảy ra đột ngột (như trong các vụ va chạm xe) như sau:



hay xảy ra một cách chậm rãi như lúc bạn phanh xe bình thường.



Trong hai trường hợp, diện tích hình phẳng dưới đường cong là như nhau vì vận tốc ta cần mất là như nhau.

II. KIỂM TRA VA CHẠM

Hãy tưởng tượng một chiếc xe hơi di chuyển với vận tốc 48.3 km/h. Nếu ta phanh xe bình thường, xe sẽ mất một khoảng thời gian từ 1.5 s đến 2 s để dừng hoàn toàn (trạng thái nghỉ).

Nhưng khi xảy ra va chạm, xe sẽ dừng chỉ trong vòng 150 ms và đỉnh của độ giảm tốc có thể đe dọa đến tính mạng kéo dài trong vòng 10 ms.

Thí nghiệm kiểm tra va chạm có sự tham gia của hình nộm, tử thi, động vật và võ sĩ quyền anh.

III. DỮ LIỆU KIỂM TRA VA CHẠM CỦA HÃNG MERCEDES BENZ

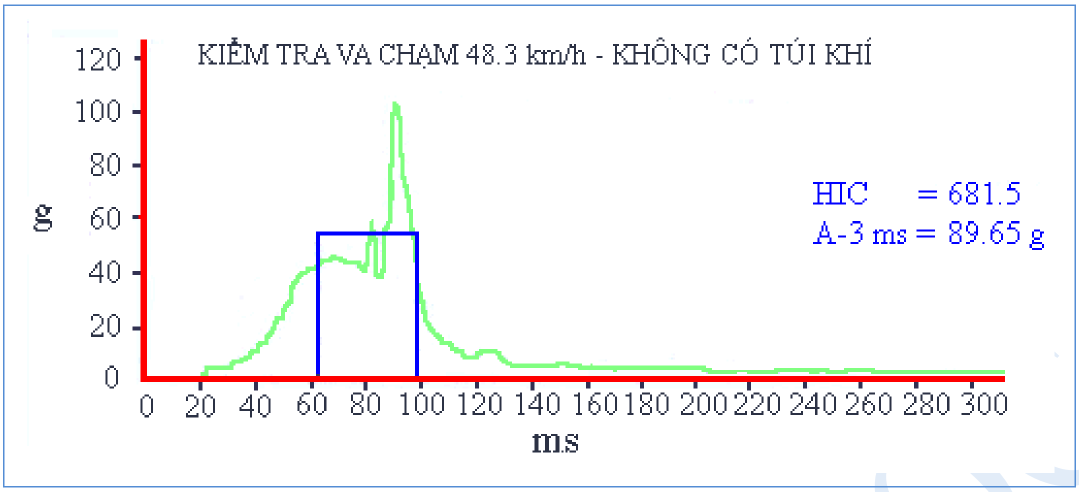
Công ty Mercedes Benz là một trong những công ty hàng đầu trong lĩnh vực sản xuất xe an toàn. Công ty này đã thực hiện nhiều thí nghiệm kiểm tra sự va chạm xe với đối tượng ngồi trong xe là hình nộm, với mục đích giảm thiểu chấn thương cho con người.

Đầu của chúng ta giống như con lắc nên đây là vùng dễ bị tổn thương nhất trên cơ thể khi xảy ra va chạm. Trong một chiếc xe không có túi khí, độ giảm tốc rất mạnh và xảy ra rất nhanh.

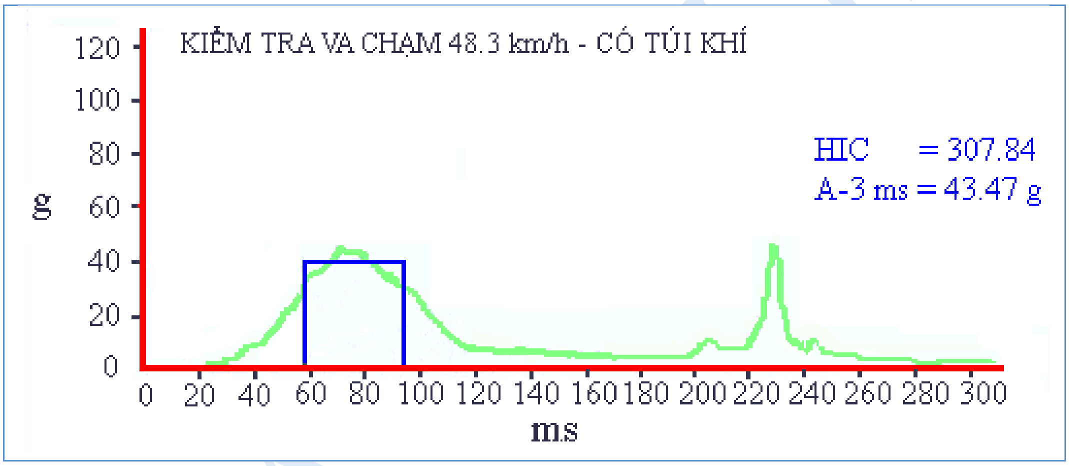
Tiêu chuẩn chấn thương đầu (HIC) có vai trò rất lớn trong trường hợp này, cho biết đầu của một người sẽ bị chấn thương hay không. (Ta sẽ quan sát cách tính HIC ở bài sau).

IV. GIÁ TRỊ A-3 MS

Giá trị A-3 ở hình sau liên quan đến mức giảm tốc cực đại, kéo dào trong 3 ms (bất kỳ khoảng thời gian nào ngắn hơn đều ảnh hưởng nhỏ đến não).

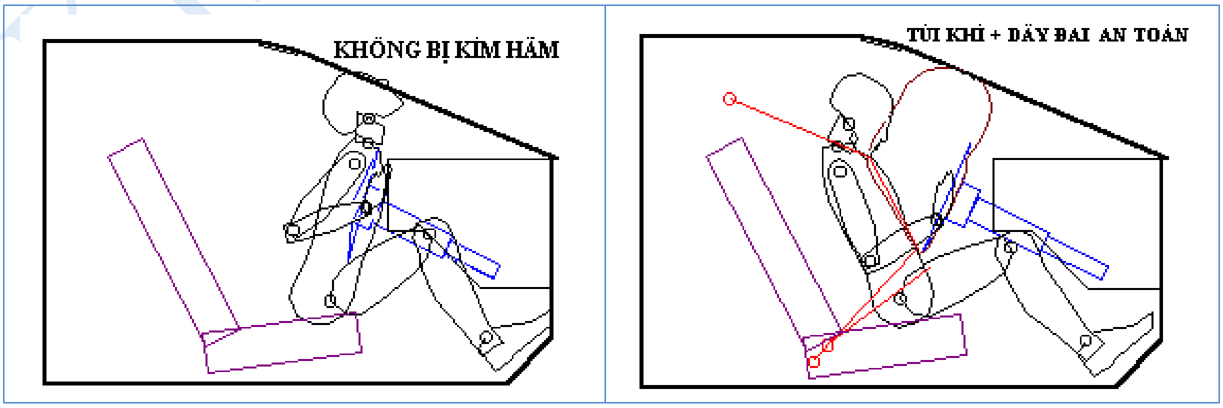


Nếu có túi khí, nó sẽ mở rộng ra, qua đó giảm thiểu lực giảm tốc. Lưu ý rằng lực cực đại (theo g) xuống thấp hơn rất nhiều khi có túi khí.



Trong hình vẽ độ giảm tốc này, hình chữ nhật màu xanh tượng cho biết phần nghiêm trọng nhất lúc giảm tốc, khi lực cực đại xuất hiện trong một khoảng thời gian dài.

Với túi khí, khả năng bạn sống sót sau va chạm sẽ cao hơn. Túi khi được phóng ra trong vòng 25 ms.



V. THIẾT KẾ XE HƠI VÀ HỆ QUẢ KHI VA CHẠM

Chiếc xe chở công chúa Diana bị nát

Hình ảnh này được chụp sau khi vụ va chạm xe hơi xảy ra vào năm 1997, làm thiệt mạng những người trong xe, kể cả công chúa Diana.

Cần lưu ý đến vùng chịu lực phía trước của xe Mercedes đã hoạt động như thế nào trong khi buồng lái vẫn giữ được hình dáng ban đầu. Tuy nhiên điều này là chưa đủ để cứu công chúa.

Vùng chịu lực có vai trò hấp thụ lực va chạm, vì vậy độ giảm tốc được giảm, kéo theo khả năng chấn thương cũng giảm.

VI. MÔ HÌNH NHẰM MÔ TẢ CHẤN THƯƠNG ĐẦU

Ta cần mô tả nguy cơ tổn thương đầu khi va chạm bằng một con số cụ thể.

Hai hướng tiếp cận chính đó là chỉ số nghiêm trọng và tiêu chuẩn chấn thương đầu.

VII. CHỈ SỐ NGHIÊM TRỌNG

Trong lịch sử, mô hình đầu tiên được phát triển đó là chỉ số nghiêm trọng (SI).

Chỉ số này xác định bởi công thức:

$$SI = \int_0^T [a(t)]^{2.5}\, dt$$

với:

+ T là khoảng thời gian diễn ra độ giảm tốc khi xảy ra va chạm.

+ $a(t)$ là độ giảm tốc tại thời gian t.

Chỉ số 2.5 được chọn cho đầu và những chỉ số khác được chọn cho những bộ phận khác trong cơ thể (thường những bộ phận dễ bị chấn thương).

Ghi chú:

g: Hằng số gia tốc trọng trường. Trong bài này ta lấy $g = 10\ m/s^2$.

Tiêu chuẩn chấn thương đầu (Head Injury Criterion) nhằm ước lượng khả năng chấn thương của đầu khi xảy ra va chạm. Xem thêm tại:

http://en.wikipedia.org/wiki/Head_injury_criterion

BÀI 3.2.12 TIÊU CHUẨN CHẤN THƯƠNG ĐẦU (HIC): CHỈ SỐ HIC, VÍ DỤ

Dựa vào thí nghiệm, các nhà nghiên cứu thấy rằng chỉ số nghiêm trọng không mô tả chính xác khả năng chấn thương khi va chạm.

Họ phát triển HIC dựa vào giá trị trung bình của gia tốc trong phần nghiêm trọng nhất của độ giảm tốc (được thể hiện bằng hình chữ nhật màu xanh trong dữ liệu của hãng Mercedes ở bài trên).

Giá trị trung bình $\bar{a}$ của gia tốc $a(t)$ trong một đoạn thời gian t_1 đến t_2 xác định bởi công thức:

$$\bar{a} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} a(t)\, dt$$

Với HIC, dựa vào dữ liệu thí nghiệm, ta biến đổi công thức đó thành:

$$HIC = \max(\{t_1 \text{ hoặc } t_2\}) \left((t_2 - t_1) \left(\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_2}^{t_1} a(t)\, dt \right)^{2.5} \right)$$

Công thức này có ý nghĩa rằng:

HIC là giá trị lớn nhất trên khoảng thời gian tới hạn t_1 đến t_2 cho biểu thức trong dấu ngoặc tròn ( ). Chỉ số 2.5 được chọn cho vùng đầu, dựa vào thí nghiệm.

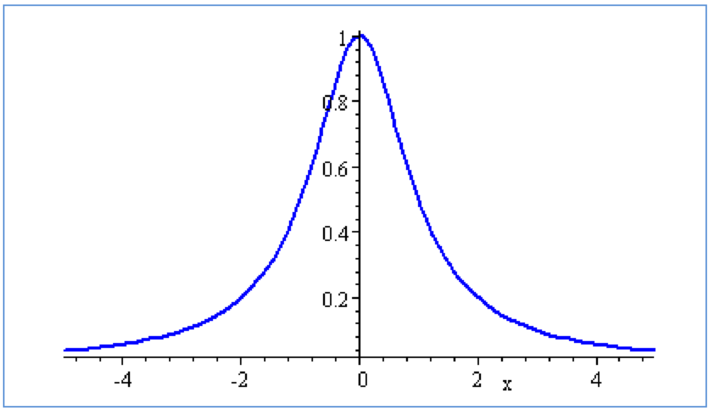
I. MÔ HÌNH HÓA KẾT QUẢ KIỂM TRA VA CHẠM

Hãy quan sát ví dụ về việc sử dụng HIC. Ta sẽ mô hình một kết quả va chạm của Mercedes Benz, sau đó áp dụng công thức trên.

1. Phát triển mô hình hóa

Hướng tiếp cận của chúng ta sẽ là mô hình hóa đường cong của độ giảm gia tốc bằng hàm số. Ta nhận thấy rằng hình dạng đồ thị dữ liệu va chạm về cơ bản giống với đường cong:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$



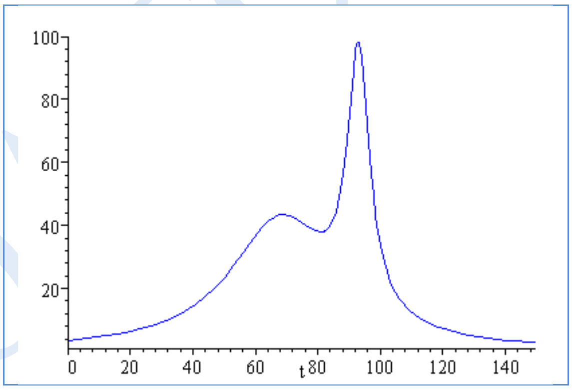
Hình ảnh này tựa như hình ảnh "đường cong hình quả chuông" trong thống kê.

2. Mô hình hoa gia tốc

Bằng cách mô hình hóa đường cong trên, ta sẽ thu được đường cong rất sát với dữ liệu thí nghiệm Mercedes.

$$a(t) = \frac{16\,400}{(t-68)^2+400} + \frac{1\,480}{(t-93)^2+18}$$

Ta tìm được mô hình này bằng cách quan sát 2 đỉnh trong đồ thị của độ giảm tốc, có tâm lại 68 ms và 93 ms. Bằng cách thêm vào 2 đường cong dạng quả chuông, ta được mô hình rất sát với đồ thị yêu cầu.



Thời gian để máy tính tính toán biểu thức HIC rất lớn, nên ta cần phải đơn giản một số thứ.

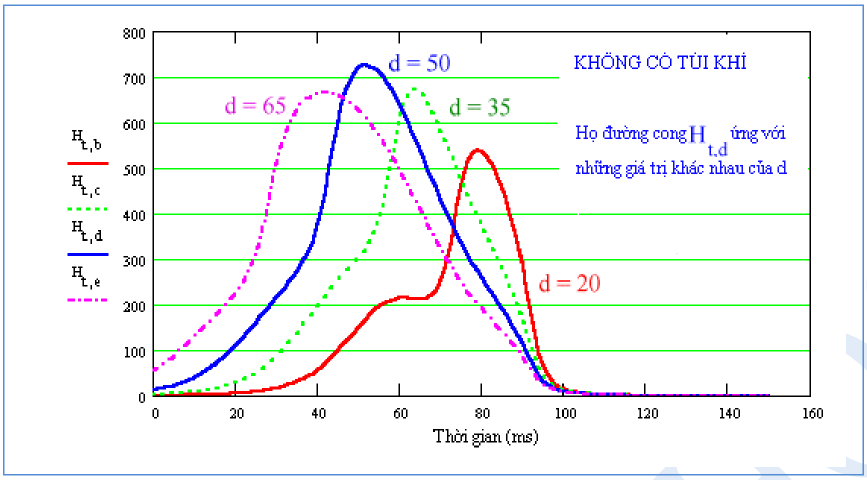
Ta có thể đơn giản các phần tử trong ngoặc nhọn của biểu thức HIC, với mỗi giá trị khác nhau của $d = t_2 - t_1$, ta định nghĩa họ đường cong:

$$H_{t;d} = d\left(\frac{1}{d}\int_{t}^{t+d} a(T)\,dT\right)^{2.5}$$

Ta thay đổi giá trị của biến d. Giá trị của đỉnh cao nhất trên họ đường cong cho ta HIC.

3. HIC không có túi khí

Bây giờ ta sẽ sử dụng mô hình cho $a(t)$ ở trên và cực đại hóa giá trị của H với những giá trị khác nhau của d.



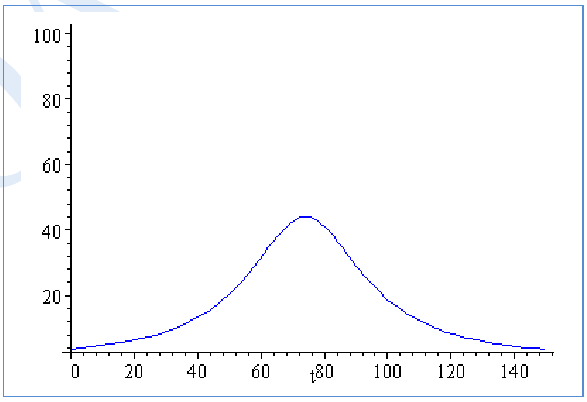
Ta thấy rằng đỉnh cao nhất xuất hiện khi $d = 50$, từ đồ thị ta thấy rằng HIC xấp xỉ 725, sát với dữ liệu của Mercedez (hình ảnh trên chỉ cho vài giá trị của d, trên thực tế giá trị $d = 50$ cho ra đường cong cao nhất).

4. HIC có túi khí

Mô hình sẽ đơn giản hơn nếu có túi khí vì độ giảm tốc sẽ mượt hơn và có dạng gần giống với hình quả chuông. Một số mô hình đã thu được biểu thức sau cho gia tốc:

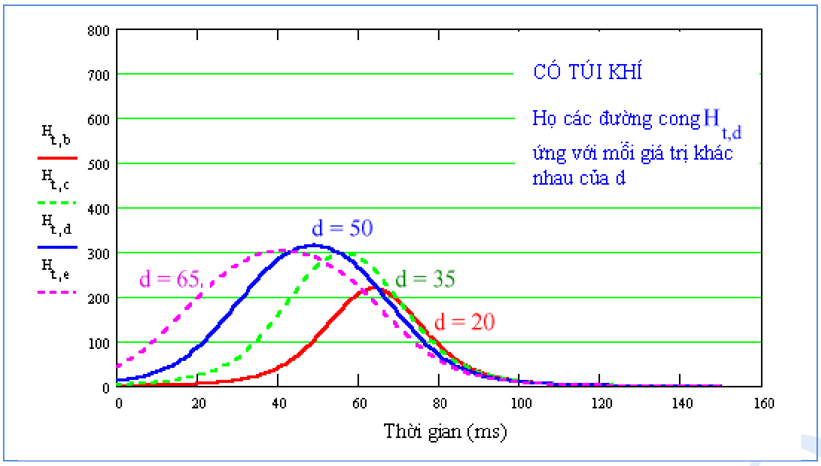
$$a(t) = \frac{22\,000}{(t-74)^2 + 500}$$

Đồ thị như sau (vẽ cùng tỉ lệ với đồ thị trong trường hợp không có túi khí):



Áp dụng lại công thức H, ta được họ đường cong và một lần nữa, $d = 50$ cho ta giá trị lớn nhất, từ đó có kết quả của HIC.

HIC trong trường hợp có túi khí có giá trị xấp xỉ 310, sát với dữ liệu của Mercedes Benz.



II. TIÊU CHUẨN CHẤN THƯƠNG ĐẦU (HIC) CÓ Ý NGHĨA GÌ?

Nhìn chung, các chuyên gia đồng ý rằng giá trị HIC trên 100 cảnh báo nguy cơ đe dọa mạng sống con người.

Mỗi số bài kiểm tra va chạm cho ra giá trị HIC thấp, tầm 142 (xe Audi 8 có túi khí vào năm 1995).

III. KẾT LUẬN

Bạn không được ôm chặt một đứa trẻ trong tay khi xảy ra va chạm.

Thắt dây an toàn bảo vệ mạng sống của bạn.

Túi khí bảo vệ đầu.

Diện tích dưới đường cong và giá trị trung bình có nhiều ứng dụng.

Chú thích: Tham khảo *Crash Tests and the Head Injury Criterion*, Henn, H, Teaching Mathematics and its Applications, Vol 17, No 4, 1998.

BÀI 3.2.13 LỰC CỦA ÁP SUẤT CHẤT LỎNG

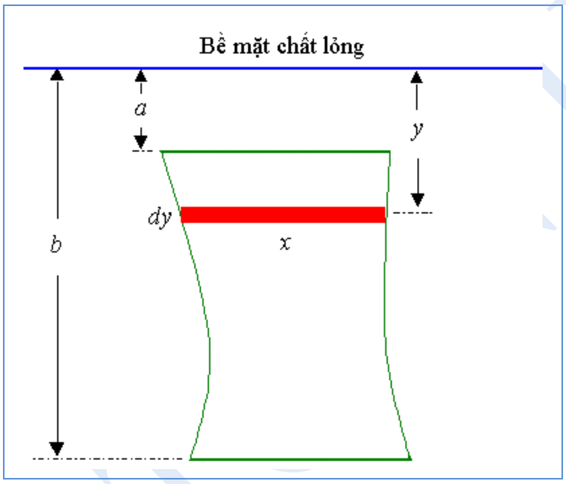
Lực F trong một miền phẳng A tại độ sâu y trong một chất lỏng có tỷ trọng w xác định bởi công thức:

$$F = wyA$$

Lực sẽ tăng nếu như tỷ trọng tăng, hay độ sâu tăng hay diện tích miền phẳng tăng.

Vậy nếu như ta có một chiếc đĩa mỏng với hình thù bất kỳ, để thẳng đứng sau đó nhúng vào chất lỏng, lực tác động vào mặt phẳng ấy tăng tỉ lệ thuận với độ sâu. Cho nên hình dạng chiếc đĩa có thể thay đổi nếu ta chìm nó sâu hơn do tác động ngày càng lớn của lực.

Vậy ta được:



Vậy tổng lực tác động lên chiếc đĩa xác định bởi công thức:

$$F = w\int_a^b xy\,dy$$

với:

+ x là chiều dài (theo m) của phần tử trong đĩa (xác định theo y).

+ y là độ sâu (theo m) của phần tử trong đĩa.

+ w là tỉ trọng chất lỏng (theo Nm^{-3}). Đối với nước, tỉ trọng này là $w = 9800\ \mathrm{Nm}^{-3}$.

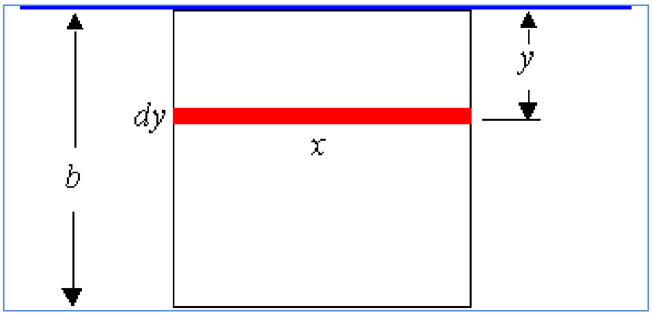
+ a là độ sâu phần cao nhất của đĩa, đề cập trong câu hỏi (theo m).

+ b là độ sâu phần thấp nhất của đĩa, đề cập trong câu hỏi (theo m).

Ví dụ 1: Tìm độ lớn của lực tác dụng vào một cạnh của thùng đựng hàng hình hộp có cạnh dài $6\ cm$. Biết rằng thùng hàng này chứa đầy thủy ngân và thủy ngân có trọng lượng riêng là $133\ kN/m^3$.

Trả lời ví dụ 1

Điều này tương tự như ta có chiếc đĩa hình vuông, cạnh dài 6 cm chứa đầy thủy ngân.



Đây là ví dụ hết sức cơ bản khi độ rộng của chiếc đĩa không thay đổi khi ta nhúng đĩa xuống nước, nó luôn có giá trị là $x = 6$.

Đồng thời, độ sâu của cạnh trên cùng chiếc đĩa là 0, vậy $a = 0$.

Để áp dụng công thức, ta có:

$$x = 0.06\ m$$

y là biến tích phân.

$$\begin{aligned} &w = 133\ kN/m = 133\,000\ N/m \\ &a = 0 \\ &b = 0.06 \end{aligned}$$

Vậy ta được:

$$\text{Lực} = w\int_a^b xy\,dy$$

$$= 133\,000\int_0^{0.06} 0.06y\,dy$$

$$= 7\,980\int_0^{0.06} y\,dy$$

$$= 7\,980\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{0.06}$$

$$= 14.4\ N$$

Ví dụ 2: Một chiếc đĩa hình tam giác vuông có đáy dài 2 m và cao 1 m chìm thẳng đứng vào nước, với đỉnh trên chìm cách mặt nước 3 m. Tìm độ lớn của lực tác động vào một cạnh của tam giác vuông.

Trả lời ví dụ 2

Trước khi xác định độ lớn của lực, ta cần tìm x theo y.

Bây giờ, khi $x = 0$ thì $y = 3$ và khi $x = 2$ thì $y = 4$.

Vậy ta được:

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ &= \frac{1}{2}x + 3 \end{aligned}$$

Điều này đưa đến $x = 2y - 6$.

Để áp dụng công thức, ta có:

$$x = 2y - 6 = 2(y - 3)$$

y là biến tích phân.

$$\begin{aligned} &w = 9\,800\ N/m^3 \\ &a = 3 \\ &b = 4 \end{aligned}$$

Vậy ta được:

$$\begin{aligned} \text{Lực} &= w\int_a^b xy\,dy \\ &= 9\,800\int_3^4 2y(y-3)\,dy \\ &= 19\,600\int_3^4 y^2 - 3y\,dy \\ &= 19\,600\left(\frac{y^3}{3} - \frac{3}{2}y^2\right)\Big|_3^4 \\ &= 35\,900\ N \end{aligned}$$

BÀI 3.2.14 SỬ DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH ĐỘ DÀI ĐƯỜNG CONG

I. VÍ DỤ 1 – TẤM SẮT LƯỢN SÓNG

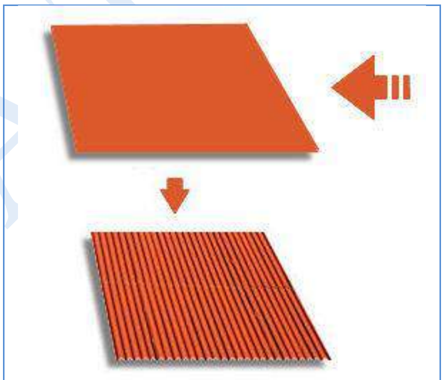
Mái nhà bằng tấm sắt lượn sóng

Tấm sắt lượn sóng được sử dụng rộng rãi trên toàn thế giới, là một vật liệu xây dựng đa năng. Tấm sắt có hình dạng lượn sóng đều có độ mạnh cao hơn tấm sắt phẳng.

Một ví dụ khác, với miếng lót nhẹ, mỏng và yếu sẽ bền hơn khi có hình dáng nếp gấp gợn sóng, tạo thành các – tông sóng, sử dụng khi vận chuyển lương thực thực phẩm.

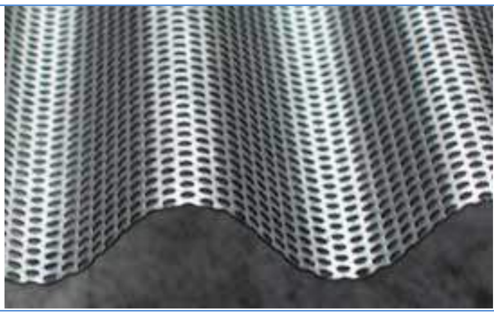
Để tạo tấm sắt lượn sóng, bạn cần phải uốn cong tấm sắt phẳng, rộng và mỏng thành hình có dạng sóng. Sau khi hoàn tất, hiển nhiên kích thước tấm sắt lượn sóng sẽ hẹp đi.

Hình dạng sóng thường giống như đường cong hình sine.



Tấm lót phẳng được uốn thành hình lượn sóng, kích thước sẽ hẹp đi.

Ta quan sát một tấm kim loại lượn sóng kích thước 4.2′′, được sử dụng nhiều khi lợp mái nhà, các toa xe lửa, hay ứng dụng trong trang trí.



Tấm kim loại lượn sóng, có dạng sóng hình sine

Tấm này có chiều rộng $106.7\ cm$, chu kỳ (là khoảng cách đỉnh trên của sóng này đến đỉnh trên của sóng cạnh nó) dài $10.67\ cm$ và có biên độ (độ cao từ điểm giữa của sóng đến đỉnh sóng) là $1.35\ cm$.

Vậy nếu ta "kéo thẳng" tấm gợn sóng này trở về tấm phẳng, khi đó tấm phẳng sẽ có độ rộng là bao nhiêu?

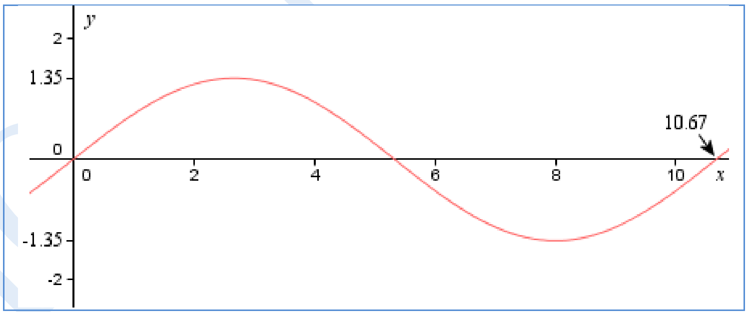
II. VÍ DỤ 1 – CÁCH GIẢI QUYẾT

Ta mô hình hóa dạng sóng bằng cách sử dụng đường cong:

$$y = 1.35 \sin(0.589x)$$

Công thức này có được do ta có biên độ là 1.35 và chu kỳ 10.67. Với biểu thức hàm sine, ta dùng $\frac{2\pi}{10.67} = 0.589$ làm hệ số cho x.

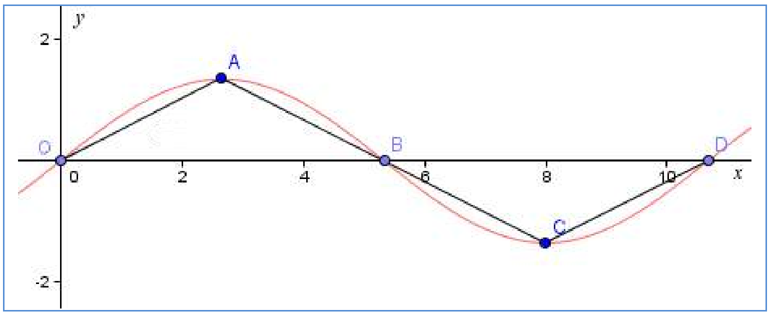
Ta sẽ xác định độ rộng cần thiết của 1 sóng, sau đó nhân với số lượng sóng.



1) Đáp án xấp xỉ

Tiếp theo, ta sẽ xấp xỉ chiều dài đường cong, từ đó ta sẽ có ý tưởng tương đối chiều dài thực đường cong sẽ là bao nhiêu (sẽ rất tốt nếu như bạn có đáp án xấp xỉ trước, nó sẽ giúp bạn hiểu rõ hơn lý thuyết được trình bày trong bài này).

Ta đặt các điểm $O\ (0;\ 0); A(2.65;\ 1.35); B(5.33; 0); C(7.99; -1.35)$ và $D(10.65; 0)$, là những điểm mấu chốt của đường cong (đó là các điểm giữa, cực đại và cực tiểu), và ta hình thành các đoạn thẳng như hình sau:



Sau đó ta dùng định lý Pythagoras để tìm độ dài OA:

$$OA = \sqrt{2.65^2 + 1.35^2} = 2.97$$

Độ dài của $AB; BC; \ CD$ đều bằng nhau, vậy ta có thể nói:

$$OA + AB + BC + CD = 4 \cdot 2.97 = 11.88$$

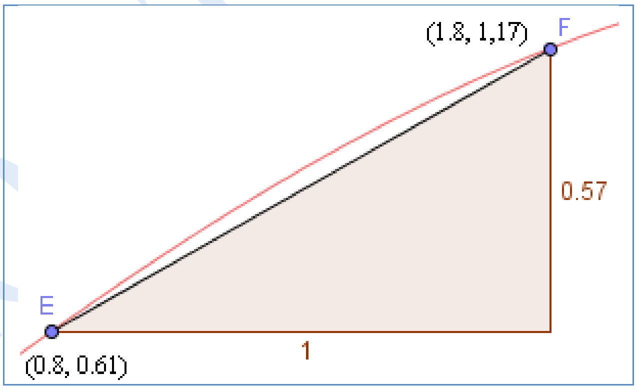
Vậy ta dự đoán chiều dài đường cong OD tầm 12 cm.

2) Đáp án chính xác

Ta sẽ dùng vi tích phân để tìm giá trị chính xác. Nhưng đầu tiên, ta cần biết ý tưởng làm.

Ta phóng to khu vực gần trung tâm của đoạn OA và ta thấy đường cong gần như là đường thẳng.

Tại đoạn này, đường cong EF gần sát với đoạn thẳng EF.



Bằng cách phóng to, ta được:

$$\text{Độ dài đường cong } EF = r \approx \int_a^b \sqrt{1^2 + 0.57^2} = 1.15$$

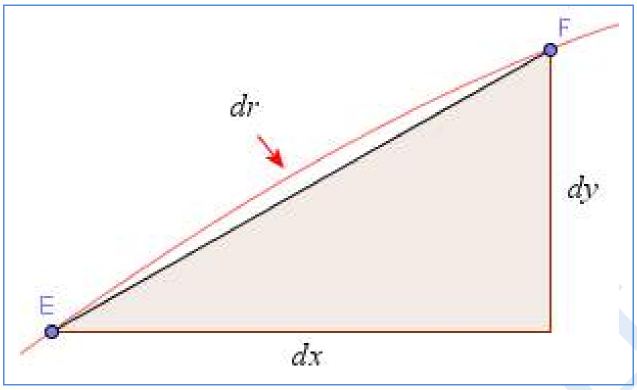
Đương nhiên, độ dài thực của đường cong EF nhiều hơn giá trị 1.15 một ít.

Hãy tổng quát hóa ý tưởng này.

3) Dạng tổng quát của độ dài đường cong

Nếu độ dài theo chiều ngang là dx (giá trị x thay đổi nhỏ) và độ cao theo chiều thẳng đứng của tam giác là dy (giá trị y thay đổi nhỏ), khi đó chiều dài của cung tròn dr được xác định xấp xỉ như sau:

$$dr \approx \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$



Bây giờ, nếu ta di chuyển điểm E rất gần với điểm F, giá trị xấp xỉ chiều dài đường cong sẽ tốt hơn trong miền địa phương đó.

Ta cần cộng hết tất cả các giá trị vô cùng nhỏ này lại. Ta dùng tích phân vì nó đại diện cho phép cộng vô hạn những độ dài vô cùng nhỏ, nằm giữa $x = a$ đến $x = b$:

$$\text{Chiều dài} = r = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Ta biểu diễn công thức trên về dạng quen thuộc như sau:

Độ dài cung của đường cong $y = f(x)$ từ $x = a$ đến $x = b$ xác định bởi:

$$\text{Chiều dài} = r = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Đương nhiên, ta giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trong miền từ $x = a$ đến $x = b$ (Nếu không, ta không thể sử dụng công thức này được).

III. QUAY LẠI VÍ DỤ VỀ CHIỀU RỘNG TẤM SẮT

Sử dụng công thức trên để tìm chiều rộng của tấm kim loại nêu trong ví dụ.

Trả lời ví dụ 1

Ta có thể sử dụng công thức trên để tìm độ rộng cần thiết của tấm sắt phẳng. Hãy nhớ rằng ta đang tìm độ rộng cần thiết cho 1 cung sóng, sau đó ta nhân kết quả với số lượng cung sóng.

Trong ví dụ trên,

$$y = 1.35 \sin(0.589x)$$

Vậy,

$$\frac{dy}{dx} = 0.795\cos(0.589x)$$

Trong đoạn cần xét, cận dưới là $x = 0$ và cận trên là $x = 10.67$. Thay vào công thức tích phân, ta sẽ tính được độ dài của 1 cung sóng.

$$r = \int_0^{10.67} \sqrt{1 + (0.795\cos(0.589x))^2}\, dx = 12.196$$

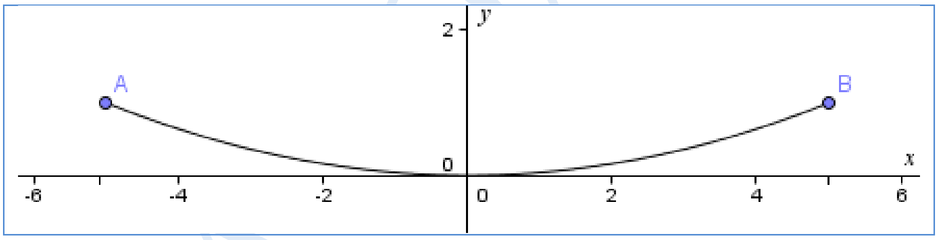
Vậy ta được độ dài cua 1 cung sóng là $12.196\ cm$.

Tấm sắt gợn sóng này có $\frac{106.7}{10.67} = 10$ cung sóng trải dài chiều rộng. Vậy kích thước tấm sắt phẳng ban đầu để tạo ra tấm sắt gợn sóng có độ rộng là $106.7\ cm$ là:

$$10 \cdot 12.196 = 122.0\ cm$$

IV. VÍ DỤ 2 – ỨNG DỤNG VÀO ĐĨA PARABOLA

Ta mô hình hóa mặt cắt ngang của đĩa parabola bằng đồ thị $y = 0.04x^2$ (theo đơn vị metre), từ $x = -5\ m$ đến $x = 5\ m$. Ta cần thiết kế một băng thép để bao quanh rìa ngoài chiếc đĩa. Ta nên thiết kế băng thép này có độ dài là bao nhiêu?



Ta cần tính độ dài đường cong AB.

Trả lời ví dụ 2

1) Ước tính

Hãy nhìn vào đồ thị (đã được canh chỉnh tỉ lệ trên trục x và trục y), ta có thể thấy đáp án cuối cùng sẽ lớn hơn $10\ m$, một giá trị nào đó giữa $10\ m$ và $11\ m$.

2) Chính xác

Bây giờ ta sẽ tính chính xác chiều dài:

$$\text{Chiều dài} = r = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Ở ví dụ này,

$$y = 0.004x^2$$

Vậy,

$$\frac{dy}{dx} = 0.08x$$

Cận dưới là $x = -5$ và cận trên là $x = 5$. Thay vào công thức, ta được:

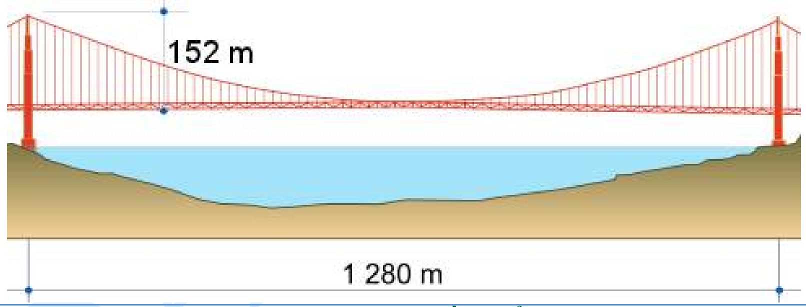
$$r = \int_{-5}^{5} \sqrt{1 + (0.08x)^2}\, dx = 10.261$$

Lưu ý: Tôi đã dùng một số phần mềm tính toán để tính tích phân, điển hình là tích phân ở trên. Nhiều bài toán tính độ dài đường cong xuất hiện những tích phân không thể tính “thủ công” (tích phân trên có thể giải “thủ công”, nhưng không dễ thấy ngay cách giải). Thường cách đơn giản nhất để tính tích phân đó là sử dụng các phương pháp tính toán số, hoặc là sử dụng phầm mềm máy tính như Matlab, Wolfram|Alpha.

Vậy băng thép có độ dài $10.26\ m$. Đáp án này phù hợp với dự đoán ban đầu.

V. VÍ DỤ 3 – DÂY CÁP CẦU CỔNG VÀNG

Nhịp trung tâm của cầu Cổng Vàng tại San Francisco, Mỹ dài $1\ 280\ m$.



Nhịp trung tâm của cầu Cổng Vàng

Chiều cao của tòa tháp là $152\ m$ tính từ mặt đường, hỏi cáp treo chính giữa 2 tòa tháp có chiều dài là bao nhiêu?

Trả lời ví dụ 3

Đầu tiên ta cần mô hình đường cong, tức tìm phương trình đường cong giống với cáp treo.

Một cáp treo tự do có dạng sợi dây chuyền. Dạng tổng quát của dây chuyền này đó là tổng của 2 hàm số mũ:

$$y = \frac{a(e^{ax} + e^{-ax})}{2}$$

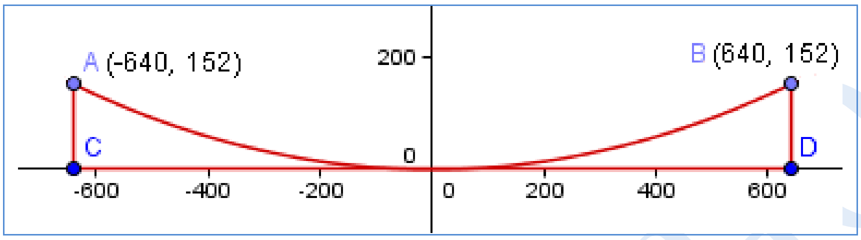
Dây cáp cầu Cổng Vàng tựa hình dây chuyền và tựa hình parabola, nhưng không hoàn toàn giống 1 trong 2 hình trên (do ảnh hưởng của khối lượng dây cáp, móc treo cáp và mặt đường). Để thuận tiện, ta giả sử dây cáp có hình dạng xích.

Ta đặt gốc tọa độ ngay điểm thấp nhất của dây cáp.

Đường cong yêu cầu (sau khi ước lượng và kiểm tra) đi qua các điểm $(-640; 152); (0; 0)$ và $(640; 152)$ có phương trình là:

$$y = 1\,280\left(\frac{e^{x/1\,326} + e^{-x/1\,326}}{2} - 1\right)$$

Đây là đồ thị của câu hỏi trên. Ta có thể thấy nó di qua những điểm đã cho trước.



Đạo hàm hàm số trên, ta được:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{640}{663}\left(\frac{e^{x/1\,326} + e^{-x/1\,326}}{2}\right)$$

Sử dụng công thức tính chiều dài đường cong, bắt đầu từ điểm $x = -640$ và kết thúc tại điểm $x = 640$, ta được:

$$\int_{-640}^{640} \sqrt{1 + \left(\frac{640}{663}\frac{e^{x/1\,326} + e^{-x/1\,326}}{2}\right)^2}\, dx = 1\,326.956$$

Vậy chiều dài của sợi cáp chính ở nhịp trung tâm là $1\,327\ m$.

Nếu tính luôn cả dây cáp ở ngoài nhịp trung tâm thì tổng chiều dài của mỗi dây cáp là $2\,332\ m$.

Chuyện bên lề: Đường kính của mỗi nhịp cáp chính ở cầu Cổng Vàng gần $1\ m$ (chính xác là $0.91\ m$) và tổng chiều dài của dây thép mạ kẽm sử dụng cho cả 2 dây cáp chính là $129\,000\ km$.

Ghi chú:

$''$: inches, đơn vị đo đường chéo của tấm kim loại trong bài, có giá trị xấp xỉ 10.668 cm.

Tham khảo thêm cách hình thành công thức tại "Chương II: Dao động cơ", *Vật lý 12 nâng cao*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, tháng 02 năm 2012. Bạn đọc có thể tương tác tại trang *http://www.intmath.com/trigonometric-graphs/2-graphs-sine-cosine-period.php* để hiểu rõ hơn về khái niệm biên độ, chu kỳ, tần số của dao động hình sine.

BÀI 3.2.15 ĐỘ DÀI ĐƯỜNG CONG: PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ, TỌA ĐỘ CỰC

I. TÍNH ĐỘ DÀI ĐƯỜNG CONG KHI BIẾT PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ

Ta sẽ nhìn vào ví dụ sau, từ đó sẽ phát triển lên ý tưởng tổng quát:

Ví dụ 1: Đường đua:

Trong bài "*Chuyển động cong*" có nêu ví dụ một chiếc xe đua di chuyển trên đường cong có phương trình tham số là:

$$x(t) = 20 + 0.2t^3$$
$$y(t) = 20t - 2t^2$$

Với x và y theo đơn vị m và t tính theo giây.

Hỏi trong 8 s đầu tiên, xe đi chuyển được bao xa?

Cách giải:

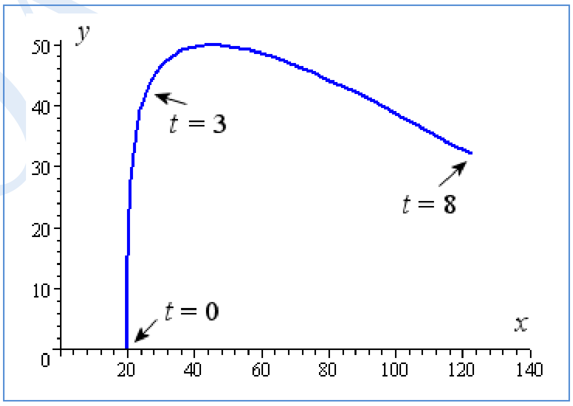
Đồ thị cho trường hợp này được cho ở bên dưới.

Cách vẽ đồ thị phụ thuộc vào cách ta đặt điểm x và y trong khoảng thời gian giữa $t = 0$ và $t = 8$.

Ví dụ, với $t = 0$ thì $x(0) = 20$ và $y(0) = 0$, vậy chiếc xe xuất phát tại điểm $(20;\ 0)$.

Tại $t = 3$, $x(3) = 25.4$ và $y(3) = 42$, vậy chiếc xe ở vị trí $(25.4;\ 42)$.

Cuối cùng, tại $t = 8$, chiếc xe ở $x(8) = 122.4$ và $y(8) = 32$, tức vị trí $(122.4;\ 32)$.



Ước lượng:

Dựa vào đồ thị, ta có thể dự đoán đáp án vào khoảng 150 m.

Ta mở rộng vấn đề đã bàn trong bài "*Sử dụng tích phân tính độ dài đường cong*" cho trường hợp tham số.

Ta bắt đầu với biểu thức đã gặp ở bài trên:

$$\text{Độ dài} = r = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Lấy vi phân theo t, bình phương lên, ta được kết quả:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

Lấy căn dương mỗi vế, ta được:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Sau đó, lấy tích phân theo t từ $t = t_1$ đến $t = t_2$ cho ta công thức tính độ dài đường cong theo phương trình tham số:

$$\text{Độ dài} = r = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Trở lại ví dụ 1:

Tìm độ dài xe đã đi theo yêu cầu, sử dụng công thức trên.

Trả lời ví dụ 1

Bây giờ ta sẽ sử dụng công thức để tính quãng đường xe đã đi được.

Trong trường hợp này, ta có:

$$x(t) = 20 + 0.2t^3$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0.6t^2$$

Ngoài ra,

$$y(t) = 20t - 2t^2$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 20 - 4t$$

Cận trên và cận dưới trong ví dụ này là $t = 0$ đến $t = 8$.

Thay vào công thức quãng đường, ta được:

$$\text{Độ dài} = r = \int_0^8 \sqrt{(0.6t^2)^2 + (20 - 4t)^2}\, dt = 144.7$$

Vậy trong 8 giây đầu tiên, xe đua đi được $144.7\ m$. Đáp án này phù hợp với dự đoán của ta ban đầu.

II. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG CONG TRONG TỌA ĐỘ CỰC

Một lần nữa, ta sẽ bắt đầu từ một ví dụ để lấy ý tưởng.

Ví dụ 2: Đường xoắn ốc vàng:

Đường xoắn ốc vàng có tính chất rằng với mỗi lần quay một góc phần tư ($90°$ hay $\frac{\pi}{2}$ radian). Khoảng cách tính từ tâm đường xoắn ốc tăng dần theo tỉ lệ vàng $\Phi = 1.618$.

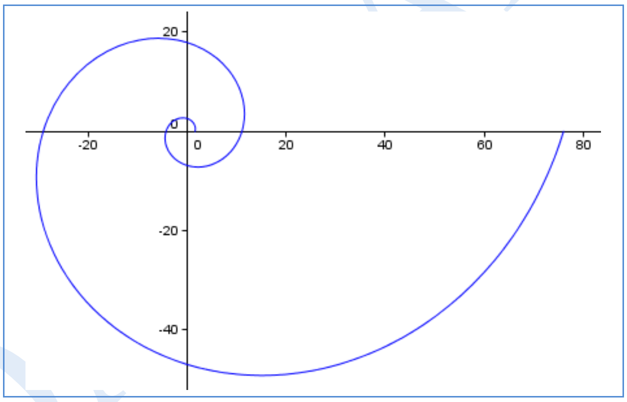
Công thức cho đường xoắn ốc vàng như sau:

$$r(\theta) = 1.618\,033e^{0.306\,35\theta}$$

Cách giải:

Tìm độ dài đường xoắn ốc vàng, tính từ tâm cho đến điểm mà đường xoắn ốc đã xoay được 2 vòng.

Dưới đây là hình đường xoắn ốc và độ dài đường cong cần tìm. Hình này được vẽ bằng cách thay các số đo góc từ $\theta = 0$ đến $\theta = 4\pi$ (2 vòng xoay).



Việc ước lượng giá trị lúc này khá khó. Nhưng ta có thể xấp xỉ bằng hình tròn, bán kính 40 và ta sẽ được kết quả chu vi:

$$C = 2\pi r = 2\pi(40) = 80\pi \approx 251$$

III. DẠNG TỔNG QUÁT CHO CÔNG THỨC TÍNH ĐỘ DÀI ĐƯỜNG CONG TRONG TỌA ĐỘ CỰC

Tổng quát, độ dài cung tròn của đường cong $r(\theta)$ trong tọa độ cực xác định bởi công thức:

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Với θ xoay từ $\theta = a$ đến $\theta = b$.

Trở lại ví dụ 2:

Sử dụng công thức trên để tính độ dài đường xoắn ốc vàng, xoay 2 vòng.

Trả lời ví dụ 2

Ta có:

$$r = 1.618\,033e^{0.306\,35\theta}$$

Vậy:

$$r^2 = 2.618\,03e^{0.612\,7\theta}$$

Và:

$$\frac{dr}{d\theta} = 0.495\,68e^{0.306\,35\theta}$$

Ta cần:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = 0.245\,697e^{0.612\,7\theta}$$

Thay vào công thức, ta tính được độ dài yêu cầu:

$$L = \int_0^{4\pi} \sqrt{2.618\,03e^{0.612\,7\theta} + 0.245\,7e^{0.612\,7\theta}}\,d\theta = 254$$

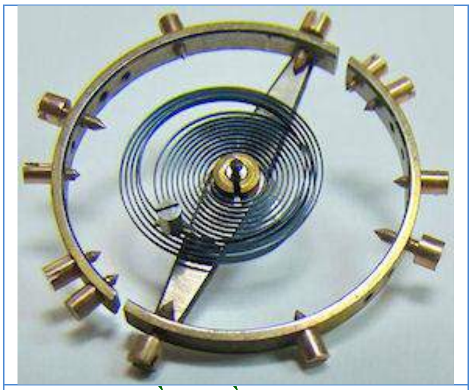
Đáp án này rất gần với kết quả ta dự đoán.

Lưu ý: Đáp án 254 được tính thông qua các chương trình tính toán như Matlab, Scientific Notebook hay Wolfram|Alpha (chương trình này cho ra kết quả là 254.2).

Nếu bạn muốn tính tích phân này bằng "thủ công", bạn có thể dùng cách tính toán số bằng quy tắc Simpson hay tổng Riemann.

Ví dụ 3: Đường xoắn ốc Archimedes.

Ta có thể thấy đường xoắn ốc Archimedes trong lò xo cơ học của đồng hồ.

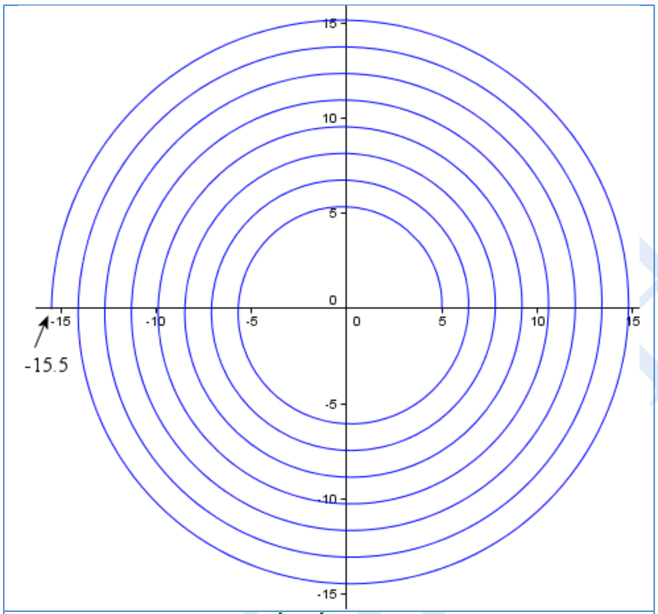


Đồng hồ cơ học

Tìm độ dài của lò xo trong đồng hồ phẳng, biết hình dạng đường xoắn ốc của lò xo là 7.5 vòng, bán kính trong là 5 mm và bán kính ngoài là 15.5 mm.

Trả lời ví dụ 3

Đây là đồ thị của đề bài:



Đường xoắn ốc Archimedes,
bán kính trong 5, bán kính ngoài 15.5,
khoảng cách giữa mỗi nhánh là 1.4 đơn vị

Đường xoắn ốc Archimedes có công thức tổng quát trong tọa độ cực là:

$$r = a + b\theta$$

với r là khoảng cách từ tâm, a là điểm bắt đầu của đường xoắn ốc và b có ảnh hưởng đến khoảng cách giữa mỗi nhánh (khoảng cách là $2\pi b$).

Trong trường hợp này, $a = 5$ (vì đây là điểm bắt đầu của đường xoắn ốc).

Khoảng cách giữa mỗi nhánh là:

$$\frac{15.5 - 5}{7.5} = \frac{10.5}{7.5} = 1.4$$

và ta xác định b bằng cách:

$$b = \frac{1.4}{2}\pi = 0.222\,82$$

Vậy công thức của chúng ta là:

$$r = 5 + 0.222\,82\theta$$

Góc quay ban đầu của θ là $a = 0$ và sau khi quay 7.5 vòng, điểm kết thúc là $b = 7.5 \cdot 2\pi = 15\pi = 47.123\,89$.

Đạo hàm:

$$\frac{dr}{d\theta} = 0.222\,82$$

Thay vào công thức của chúng ta, ta được:

$$L = \int_0^{15\pi} \sqrt{(5 + 0.222\,82\theta)^2 + (0.222\,82)^2}\,d\theta = 483.1$$

Vậy lò xo đồng hồ dài $483.1\ mm$.

PHẦN 3.3 CÁC CÔNG THỨC TÍNH TÍCH PHÂN

BÀI 3.3.1 MỞ ĐẦU

Trong phần này, ta sẽ trải nghiệm một vài kỹ thuật thú vị để tính tích phân phức tạp, từ đó, bạn có thể giải quyết nhiều bài toán cần ứng dụng của vi tích phân.

Một số kỹ thuật có thể bạn sẽ thấy "kinh hãi" khi mới nhìn, nhưng thực ra nó chỉ ngược với các công thức tính đạo hàm cơ bản và công thức tính đạo hàm hàm siêu việt.

Ngoài ra, các công thức có trong chương này dựa vào công thức lũy thừa tổng quát trong tích phân mà ta đã gặp từ trước.

Trong phần này:

+ Bài 3.3.1 Mở đầu.

+ Bài 3.3.2 Công thức tính tích phân hàm lũy thừa tổng quát.

+ Bài 3.3.3. Công thức tính tích phân hàm logarithm cơ bản.

+ Bài 3.3.4 Công thức tính tích phân hàm mũ.

+ Bài 3.3.5 Công thức tính tích phân hàm lượng giác cơ bản.

+ Bài 3.3.6 Một số công thức khác tính tích phân hàm lượng giác.

+ Bài 3.3.7 Công thức tính tích phân hàm lượng giác ngược.

+ Bài 3.3.8 Tích phân từng phần.

+ Bài 3.3.9 Tính tích phân bằng cách đặt ẩn lượng giác.

+ Bài 3.3.10 Tính tích phân bằng cách dùng bảng.

+ Bài 3.3.11 Bảng một số tích phân thường gặp.

+ Bài 3.3.12 Tính tích phần bằng công thức hồi quy.

+ Bài 3.3.13 Tính tích phân bằng phân số riêng phần.

BÀI 3.3.2 CÔNG THỨC TÍNH TÍCH PHÂN HÀM LŨY THỪA TỔNG QUÁT

Trong bài này, ta áp dụng công thức sau cho hàm lượng giác, hàm logarithms và hàm mũ:

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad (n \neq 1)$$

Ví dụ 1: Tính tích phân:

$$\int \sin^{1/3}(x)\cos(x)\,dx$$

Trả lời ví dụ 1

$$\int \sin^{1/3}(x)\cos(x)\,dx$$

Ta sẽ chọn $u = \sin(x)$; $u = \sin^{\frac{1}{3}}(x)$ hoặc $u = \cos(x)$. Tuy nhiên, chỉ có cách đặt đầu tiên là phù hợp với công thức của ta.

Vậy ta đặt:

$$u = \sin(x)$$

Tính vi phân:

$$du = \cos(x)\,dx$$

Thay vào tích phân, ta được:

$$\begin{aligned}\int \sin^{1/3}(x)\cos(x)\,dx &= \int u^{1/3}\,du \\ &= \frac{3u^{4/3}}{4} + K \\ &= \frac{3\sin^{4/2}(x)}{4} + K\end{aligned}$$

Ta có được dòng cuối cùng bằng cách biểu diễn lại đáp án theo x.

Ví dụ 2: Tính tích phân:

$$\int \frac{\sin^{-1}(4x)}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx$$

Trả lời ví dụ 2

$$\int \frac{\sin^{-1}(4x)}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx$$

Ta có nhiều cách đặt u trong trường hợp này, ví dụ như $\sin^{-1}(4x)$, hay $1-16x^2$, hay $\sqrt{1-16x^2}$. Chỉ một trong số này sẽ cho ra du mà ta có thể dùng để tính tích phân., đó là cái đầu tiên.

Đặt $u = \sin^{-1}(4x)$.

Khi đó, dựa vào công thức đạo hàm hàm lượng giác ngược, ta được:

$$du = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}dx$$

Ta chia hai vế cho 4 để ta thay vào tích phân ban đầu.

$$\frac{1}{4}du = \frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}dx$$

Khi đó, tích phân ban đầu viết thành:

$$\int \frac{\sin^{-1}(4x)}{\sqrt{1-16x^2}}dx = \frac{1}{4}\int u\,du$$

Biểu thức bên vế phải là một tích phân đơn giản:

$$\frac{1}{4}\int u\,du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^2}{2}\right) + K$$

Để kết thúc bài toán, ta thay $\sin^{-1}(4x)$ và u:

$$\int \frac{\sin^{-1}(4x)}{\sqrt{1-16x^2}}dx = \frac{(\sin^{-1}(4x))^2}{8} + K$$

Ví dụ 3: Tính tích phân:

$$\int \frac{(3+\ln(2x))^3}{x}dx$$

Trả lời ví dụ 3

$$\int \frac{(3+\ln(2x))^3}{x}dx$$

Đặt:

$$u = 3 + 2\ln(2x)$$

Ta có thể mở rộng phần log bên vế phải như sau:

$$3 + \ln(2x) = 3 + \ln(2) + \ln(x)$$

Hai phần tử đầu tiên ở vế phải là hằng số (mà đạo hàm bằng 0) và đạo hàm logarithm tự nhiên của x là $\frac{1}{x}$.

Khi đó $du = \frac{1}{x}dx$.

$$\int \frac{(3+\ln(2x))^3}{x}dx = \int u^3\,du$$
$$= \frac{u^4}{4} + K$$
$$= \frac{(3+\ln(2x))^4}{4} + K$$

Ví dụ 4: Tính tích phân.

$$\int 2\sqrt{1-e^{-x}}\,e^{-x}\,dx$$

Trả lời ví dụ 4

$$\int 2\sqrt{1-e^{-x}}\,e^{-x}\,dx$$

Đặt:

$$u = 1 - e^{-x}$$

Đạo hàm của u là:

$$\frac{du}{dx} = 0 - (-e^{-x}) = e^{-x}$$

Vậy vi phân du là:

$$du = e^{-x}\,dx$$

Thay vào tích phân và tính, ta được:

$$\int 2\sqrt{1+e^{-x}}\,e^{-x}\,du = 2\int \sqrt{u}\,du$$
$$= 2\int u^{1/2}\,dx$$
$$= 2\left(\frac{2}{3}\right)u^{3/2} + K$$
$$= \frac{4}{3}(1-e^{-x})^{3/2} + K$$

Ví dụ 5: Xác định phương trình đường cong, biết $\frac{dy}{dx} = \frac{(\ln(x))^2}{x}$ và đường cong đi qua điểm $(1;2)$.

Trả lời ví dụ 5

$$y = \int \frac{(\ln(x))^2}{x} dx$$

Đặt $u = \ln(x)$.

Khi đó $du = \frac{1}{x} dx$.

$$y = \int \frac{(\ln(x))^2}{x} dx$$

$$= \int u^2 \, du$$

$$= \frac{u^3}{3} + K$$

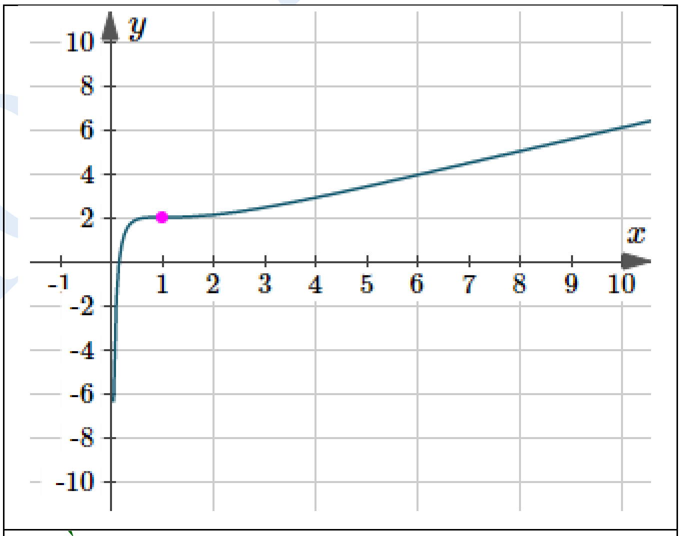
$$= \frac{(\ln(x))^3}{3} + K$$

Với $x = 1$ thì $y = 2$ nên:

$$2 = \frac{(\ln(1))^3}{3} + K$$
$$\Longrightarrow K = 2$$

Vậy phương trình đường cong là:

$$y = \frac{(\ln(x))^3}{3} + 2$$



Đồ thị phương trình đường cong ở ví dụ 5, đi qua điểm $(1; 2)$

BÀI TẬP: Tính các tích phân sau:

Bài tập 1:

$$\int \frac{(\cos^{-1}(2x))^4}{\sqrt{1-4x^2}}dx$$

Trả lời bài tập 1

$$\int \frac{(\cos^{-1}(2x))^4}{\sqrt{1-4x^2}}dx$$

Đặt:

$$u = \cos^{-1} 2x$$

$$\Rightarrow du = \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}dx$$

Vậy:

$$\int \frac{(\cos^{-1}(2x))^4}{\sqrt{1-4x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int u^4\, du$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{u^5}{5}\right) + K$$

$$= \frac{-(\cos^{-1} 2x)^5}{10} + K$$

Bài tập 2:

$$\int_1^e \frac{(1-2\ln x)}{x}dx$$

Trả lời bài tập 2

$$\int_1^e \frac{(1-2\ln x)}{x}dx$$

Đặt:

$$u = 1 - 2\ln x$$

$$\Rightarrow du = \frac{-2}{x}dx$$

$$\int_1^e \frac{(1-2\ln x)}{x}dx = -\frac{1}{2}\int_{x=1}^{x=e} u\, du$$

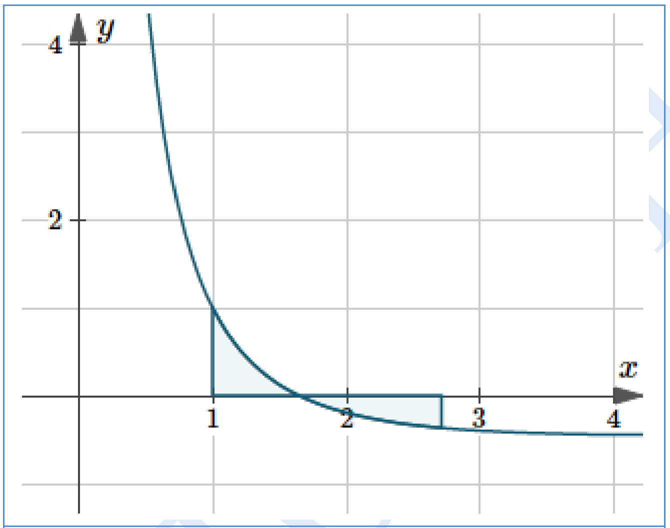
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=e}$$

$$= \left(\frac{-u^2}{4}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=e}$$

$$= \left(\frac{-(1-2\ln x)^2}{4}\right)\Bigg|_1^e$$

$$= \left(\frac{-\left(1-2(1)\right)^2}{4}\right) - \left(\frac{-(1-0)^2}{4}\right)$$

$$= 0$$



Vùng sậm màu minh họa cho tích phân ở bài tập 2

Bài tập 3:

$$\int (e^x + e^{-x})^{\frac{1}{4}}(e^x - e^{-x})\,dx$$

Trả lời bài tập 3

$$\int (e^x + e^{-x})^{\frac{1}{4}}(e^x - e^{-x})\,dx$$

Đặt

$$u = e^x + e^{-x}$$

$$\Rightarrow du = (e^x - e^{-x})\,dx$$

Khi đó:

$$\int (e^x + e^{-x})^{\frac{1}{4}}(e^x - e^{-x})\,dx = \int u^{\frac{1}{4}}\,du$$

$$= \frac{4u^{5/4}}{5} + K$$

$$= \frac{4(e^x + e^{-x})^{5/4}}{5} + K$$

Bài tập 4:

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}}$$

Trả lời bài tập 4

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}}$$

Đặt $u = 1 + \cos\theta$, khi đó $du = -\sin\theta\, d\theta$

Vậy:

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}} = -\int_{\theta=\pi/3}^{\theta=\pi/2} \frac{du}{\sqrt{u}}$$

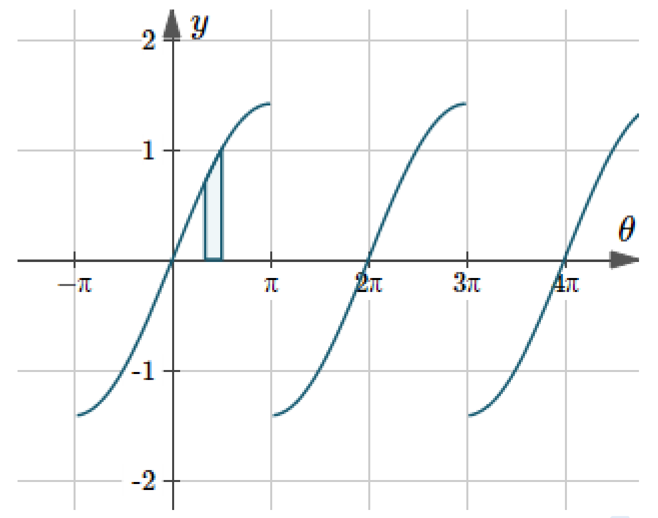
$$= -\int_{\theta=\pi/3}^{\theta=\pi/2} u^{-1/2}\, du$$

$$= -2\left(u^{1/2}\right)\Big|_{\theta=\pi/3}^{\theta=\pi/2}$$

$$= -2\left(\sqrt{1+\cos\theta}\right)\Big|_{\pi/3}^{\pi/2}$$

$$= -2\left(\sqrt{1+0} - \sqrt{1+0.5}\right)$$

$$= 0.449489$$



Vùng sậm màu minh họa cho tích phân ở bài tập 4

Bài tập 5: Tìm phương trình đường cong, biết $\frac{dy}{dx} = (1 + \tan(2x))^2 \sec^2(2x)$ và đường cong đi qua điểm $(2; 1)$.

Trả lời bài tập 5

$$\frac{dy}{dx} = (1 + \tan(2x))^2 \sec^2(2x)$$

Ta cần tìm:

$$y = \int (1 + \tan(2x))^2 \sec^2(2x)\, dx$$

Đặt $u = 1 + \tan 2x$, khi đó $du = 2\sec^2 2x\, dx$

$$y = \int (1 + \tan(2x))^2 \sec^2(2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int u^2\, du$$

$$= \frac{u^3}{6} + K$$

$$= \frac{(1 + \tan 2x)^3}{6} + K$$

Đường cong đi qua điểm $(2; 1)$, tức khi $x = 2$ thì $y = 1$. Ta thay thế giá trị này vào kết quả:

$$1 = \frac{(1 + \tan 2(2))^3}{6} + K$$

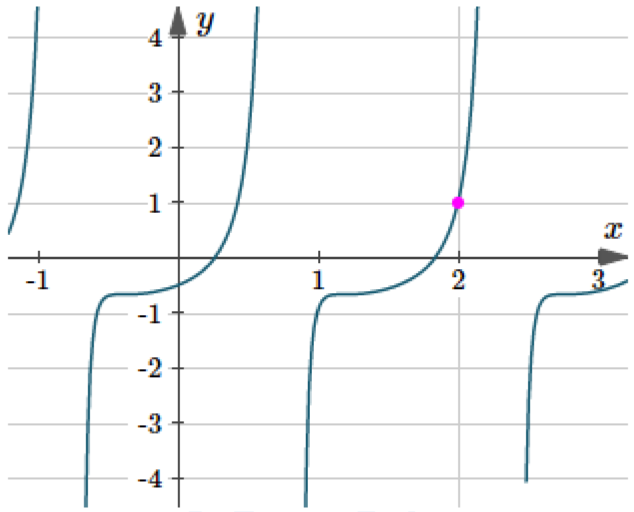
$$1 = \frac{(1+\tan 4)^3}{6} + K$$

$$1 = 1.674\,539 + K$$

Điều này dẫn đến $K \approx -0.675$.

Vậy cuối cùng ta đã có hàm số y theo yêu cầu:

$$y = \frac{(1+\tan 2x)^3}{6} - 0.675$$



Đồ thị hàm số:

$$y = \frac{(1+\tan 2x)^3}{6} - 0.675$$

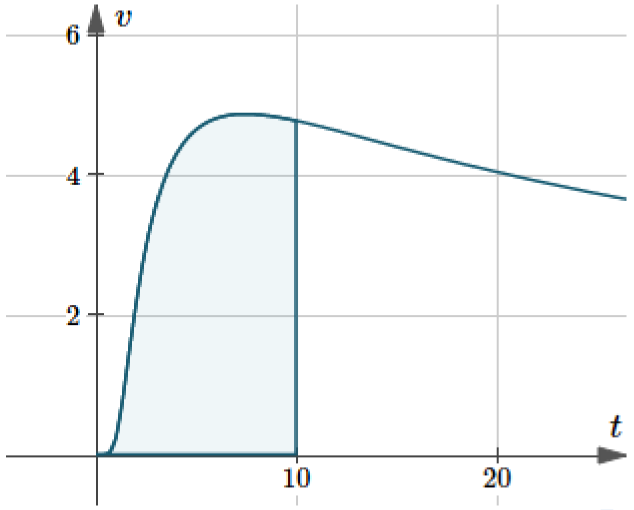
đi qua điểm $(2; 1)$

Bài tập 6: Một tàu không gian được phóng thẳng đứng từ mặt đất, có vận tốc v (theo km/s) thỏa:

$$v = [\ln^2(t^3+1)]\frac{t^2}{t^3+1}$$

với t là thời gian tính theo giây. Tìm độ cao của tàu sau 10 giây.

Đồ thị của hàm v được cho dưới đây.



Vùng làm mờ là độ cao ta cần tìm trong bài tập 6

Trả lời bài tập 6

Ta có:

$$s = \int v\,dt$$

(trong bài này ta có thể dùng s hoặc h làm ký hiệu đại diện cho chiều cao.)

Ta cần tìm:

$$s\int [\ln^2(t^3+1)]\frac{t^2}{t^3+1}dt$$

Đặt:

$$u = \ln(t^3+1)$$

$$\Rightarrow du = \frac{3t^2}{t^3+1}dt$$

Trong dấu tích phân, ta cần:

$$u^2 = \ln^2(t^3+1)$$

Vậy:

$$s = \frac{1}{3}\int u^2\,du$$

$$= \frac{u^3}{9} + K$$

$$= \frac{\ln^3(t^3 + 1)}{9} + K$$

Vì độ cao bằng 0 khi $t = 0$, ta thay thế giá trị này vào và thu được $K = 0$.

$$s = \frac{\ln^3(t^3 + 1)}{9}$$

Tại $t = 10$, độ cao của tàu không gian là:

$$s = \frac{\ln^3\left((10) + 1\right)}{9} = 36.6\ km$$

BÀI 3.3.3 CÔNG THỨC TÍNH TÍCH PHÂN HÀM LOGARITHM CƠ BẢN

Công thức hàm lũy thừa tổng quát mà ta thấy ở bài trên thỏa mãn với các giá trị n khác -1.

Nếu $n = -1$, ta cần làm ngược phần đạo hàm hàm số logarithm để giải quyết tình huống này.

$$\int \frac{1}{u} du = \ln(|u|) + K$$

Dấu trị tuyệt đối của u rất quan trọng vì chưa có định nghĩa về logarithm của số âm.

Ta có thể viết lại công thức thành:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + K$$

Nói bằng lời, điều này có nghĩa rằng trong phân số, tử số chính là kết quả đạo hàm của mẫu số thì tích phân phân số đó chính là logarithm tự nhiên của hàm số.

Ví dụ 1: Tính tích phân:

$$\int \frac{2x^3}{x^4 + 1} dx$$

Trả lời ví dụ 1

$$\int \frac{2x^3}{x^4 + 1} dx$$

Đặt $u = x^4 + 1$, khi đó $du = 4x^3\, dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3}{x^4 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{2} \ln(|u|) + K \\ &= \frac{1}{2} \ln(|x^4 + 1|) + K\end{aligned}$$

Trong bài này, ta không nhất thiết phải đặt dấu trị tuyệt đối vì $x^4 + 1 > 0$ với mọi giá trị x thực.

Ví dụ 2: Tính tích phân:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2(x)}{4 + \tan(x)} dx$$

Trả lời ví dụ 2

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2(x)}{4+\tan(x)}dx$$

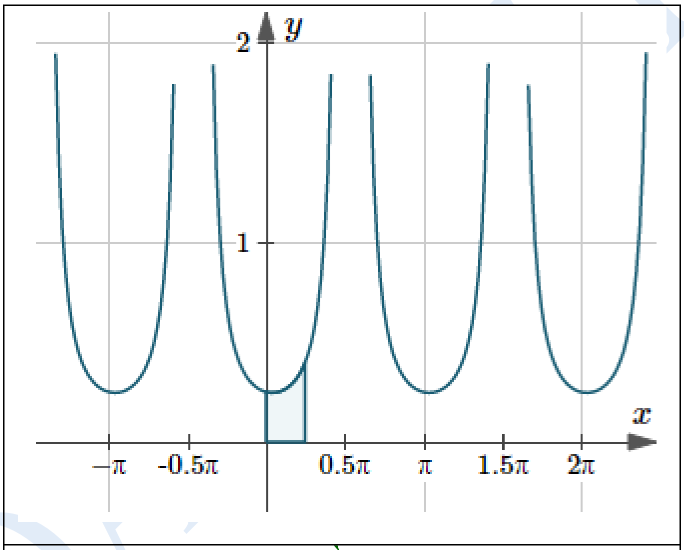
Đặt $u = 4 + \tan x$, khi đó $du = \sec^2 x\ dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2(x)}{4+\tan(x)}dx = \ln(|4+\tan(x)|)|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$= 0.223$$

Đây là đường cong $y = \frac{\sec^2(x)}{4+\tan(x)}$



Vùng sậm màu là phần diện tích ta vừa tìm

Ví dụ 3: Tính tích phân.

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}dx$$

Trả lời ví dụ 3

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}dx$$

Đặt $u = \ln(x)$, khi đó $du = \frac{1}{x}dx$:

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}dx = \int \frac{1}{u}du$$

$$= \ln(|u|) + K$$

$$= \ln(|\ln(x)|) + K$$

Ví dụ 4: Phương trình:

$$t = \int \frac{1}{20 - v} dv$$

biểu diễn một lực tỉ lệ với vận tốc của một vật thể đang di chuyển xuống trên một mặt phẳng nghiêng. Tìm vận tốc v là hàm số theo thời gian t, nếu như vật bắt đầu di chuyển từ trạng thái nghỉ.

Trả lời ví dụ 4

$$t = \int \frac{1}{20 - v} dv$$

Đặt $u = 20 - v$, khi đó $du = -dv$.

Vậy:

$$t = \int \frac{1}{20 - v} dv$$

$$= -\int \frac{1}{u} du$$

$$= -\ln(|u|) + K$$

$$= -\ln(|20 - v|) + K$$

Với $t = 0$ thì $v = 0$.

Vậy $0 = -\ln(20) + K \Longrightarrow K = \ln(20)$.

Từ đó ta được:

$$t = \ln(20) - \ln(20 - v)$$

Áp dụng công thức logarithm, ta được:

$$t = \ln\left(\frac{20}{20 - v}\right)$$

Lấy e hai vế, ta được:

$$e^t = \frac{20}{20 - v}$$

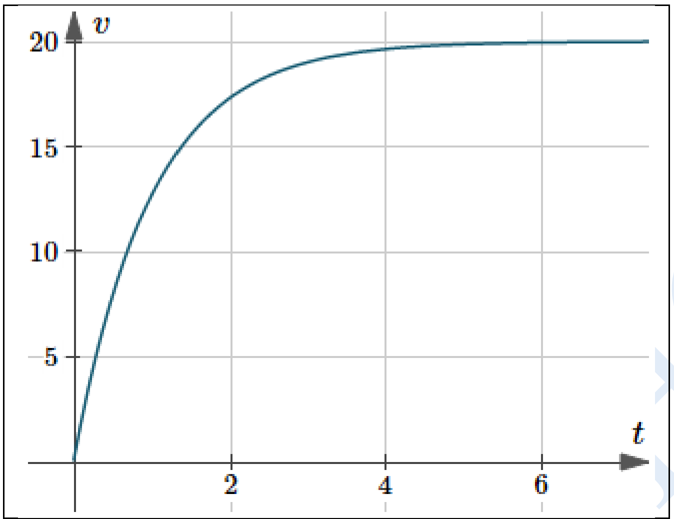
Nghịch đảo phân số, ta được:

$$e^{-t} = \frac{20 - v}{20}$$

$$\Leftrightarrow 20e^{-t} = 20 - v$$

$$\Leftrightarrow v = 20 - 20e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow v = 20(1 - e^{-t})$$



Đây là đồ thị vận tốc của vật thể theo thời gian t

BÀI TẬP: Tính tích phân các hàm số sau:

Bài tập 1:

$$\int \frac{1}{x(1 + 2\ln(x))} dx$$

Trả lời bài tập 1

$$\int \frac{1}{x(1 + 2\ln(x))} dx$$

Đặt:

$$u = 1 + 2\ln x$$

$$\Rightarrow du = \frac{2}{x} dx$$

Khi đó:

$$\int \frac{1}{x(1 + 2\ln(x))} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{1}{2} \ln|1 + 2\ln x| + K$$

Bài tập 2:

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^3+3x}dx$$

Trả lời bài tập 2

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^3+3x}dx$$

Đặt $u = x^3 + 3x$, khi đó $du = (3x^2 + 3) = 3(x^2 + 1)$

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^3+3x}dx = \frac{1}{3}\int_{x=1}^{x=2} \frac{du}{u}$$

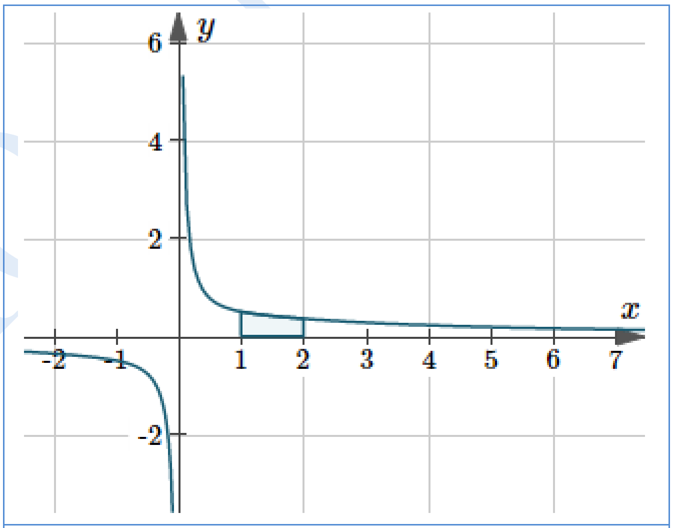
$$= \frac{1}{3}(\ln|u|)|_{x=1}^{x=2}$$

$$= \frac{1}{3}(\ln|x^3 + 3x|)|_1^2$$

$$= \frac{1}{3}(\ln(14) - \ln(4))$$

$$= 0.418$$

Đây là đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+1}{x^3+3x}$:



Vùng làm mờ là tích phần ta vừa tìm

Bài tập 3: Công suất điện p tạo ra từ một điện trở nào đó xác định bởi:

$$p = 3\int \frac{\sin(\pi t)}{2 + \cos(\pi t)}dt$$

với t là thời gian. Biểu diễn p là một hàm số theo t.

Trả lời bài tập 3

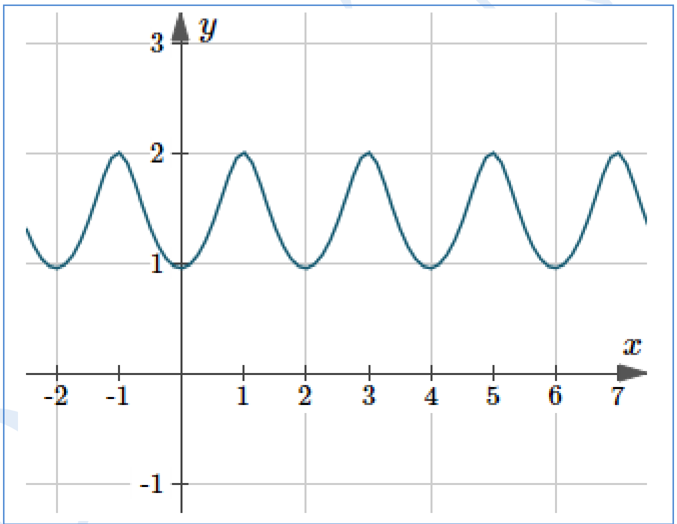
$$p = 3\int \frac{\sin(\pi t)}{2+\cos(\pi t)}dt$$

Đặt $u = 2 + \cos \pi t$, khi đó $du = -\pi \sin \pi t$.

Vậy:

$$\begin{aligned} p &= 3\int \frac{\sin(\pi t)}{2+\cos(\pi t)}dt \\ &= -\frac{3}{\pi}\int \frac{-\pi \sin \pi t}{2+\cos(\pi t)}dt \\ &= -\frac{3}{\pi}(\ln(2+\cos \pi t)) + K \end{aligned}$$

Dưới đây là đồ thị hàm kết quả:



Đồ thị hàm số công suất điện p theo thời gian t (với $K = 2$)

BÀI 3.3.4 CÔNG THỨC TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MŨ

Bằng cách làm ngược quy trình khi đạo hàm hàm số mũ, ta sẽ được công thức rất quan trọng:

$$\int e^u\,du = e^u + K$$

Công thức này rất thú vị vì kết quả tích phân giống với biểu thức lấy tích phân, đó là e^u.

Ví dụ 1: Tính tích phân.

$$\int 3e^{4x}\,dx$$

Trả lời ví dụ 1

$$\int 3e^{4x}\,dx$$

Đặt $u = 4x$, khi đó $du = 4dx$. Tích phân của ta trở thành:

$$\begin{aligned}\int 3e^{4x}\,dx &= \int 3(e^u)\frac{du}{4}\\ &= \frac{3}{4}\int e^u\,du\\ &= \frac{3}{4}e^u + K\\ &= \frac{3}{4}e^{4x} + K\end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính tích phân.

$$\int e^{x^4}4x^3\,dx$$

Trả lời ví dụ 2

$$\int e^{x^4}4x^3\,dx$$

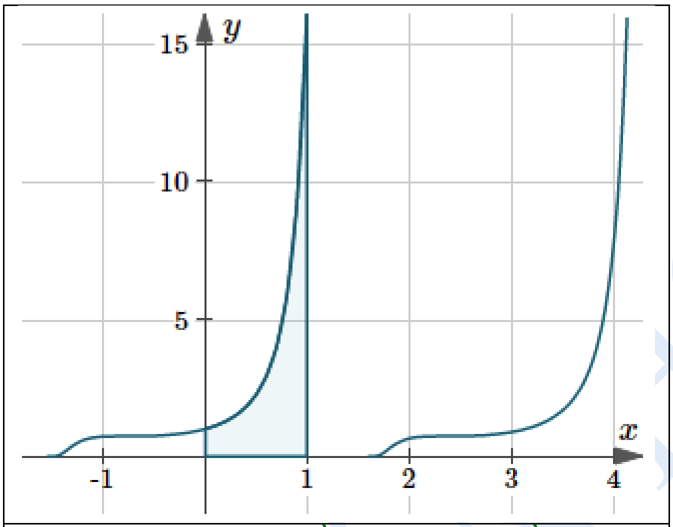
Đặt $u = x^4$, khi đó $du = 4x^3\,dx$. Tích phân của ta thành:

$$\begin{aligned}\int e^{x^4}4x^3\,dx &= \int e^u\,du\\ &= e^u + K\\ &= e^{x^4} + K\end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tính tích phân:

$$\int_0^1 \sec^2(x)\, e^{\tan(x)}\, dx$$

Đây là đường cong $y = \sec^2(x)\, e^{\tan(x)}$:



Vùng làm mờ là phần diện tích ta cần tìm

Trả lời ví dụ 3

$$\int_0^1 \sec^2(x)\, e^{\tan(x)}\, dx$$

Đặt $u = \tan(x)$, khi đó $du = \sec^2(x)\, dx$. Nên ta được:

$$\int_0^1 \sec^2(x)\, e^{\tan(x)}\, dx = e^{\tan(x)}\Big|_0^1$$

$$= 3.747$$

Đương nhiên, x tính theo radian. Kỹ thuật tính tích phân này không sử dụng được theo độ.

Ví dụ 4: Trong lý thuyết laser, ta thấy rằng.

$$E = a \int_0^{I_0} e^{-Tx}\, dx$$

với $a;\ I_0$ và T là hằng số. Tìm E.

Trả lời ví dụ 4

$$E = a\int_0^{I_0} e^{-Tx}\,dx$$

Đặt $u = -Tx$, khi đó $du = -T\,dx$. Tích phân của chúng ta thành:

$$\begin{aligned} E &= a\int_0^{I_0} e^{-Tx}\,dx \\ &= -\frac{a}{T}\int_{x=0}^{x=I_0} e^u\,du \\ &= -\frac{a}{T}(e^u)\Big|_{x=0}^{x=I_0} \\ &= -\frac{a}{T}(e^{-Tx})\Big|_0^{I_0} \\ &= \frac{a}{T}(1 - e^{-TI_0}) \end{aligned}$$

I. BÀI TẬP: Tính các tích phân:

Bài 1:

$$\int xe^{-x^2}\,dx$$

Trả lời bài 1

$$\int xe^{-x^2}\,dx$$

Đặt $u = -x^2$, khi đó $du = -2x\,dx$.

$$\begin{aligned} \int xe^{-x^2}\,dx &= -\frac{1}{2}\int e^u\,du \\ &= -\frac{1}{2}e^u + K \\ &= -\frac{e^{-x^2}}{2} + K \end{aligned}$$

Bài 2:

$$\int \frac{4}{\sec x\ e^{\sin x}}\,dx$$

Trả lời bài 2

Vì $\frac{1}{\sec x} = \cos x$, ta có thể viết lại biểu thức trong dấu tích phân là:

$$\int \frac{4\cos x}{e^{\sin x}} dx$$

Đặt $u = \sin x$, khi đó $du = \cos x\, dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{4\cos x}{e^{\sin x}} dx &= 4\int \frac{du}{e^u} \\ &= 4\int e^{-u}\, du \\ &= -4e^{-u} + K \\ &= -4e^{-\sin x} + K\end{aligned}$$

Bài tập 3:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{e^{2-3x}}$$

Trả lời bài tập 3

Vì $-(2-3x) = 3x - 2$, ta có thể chuyển biểu thức ở mẫu lên trên và viết lại biểu thức trong dấu tích phân là:

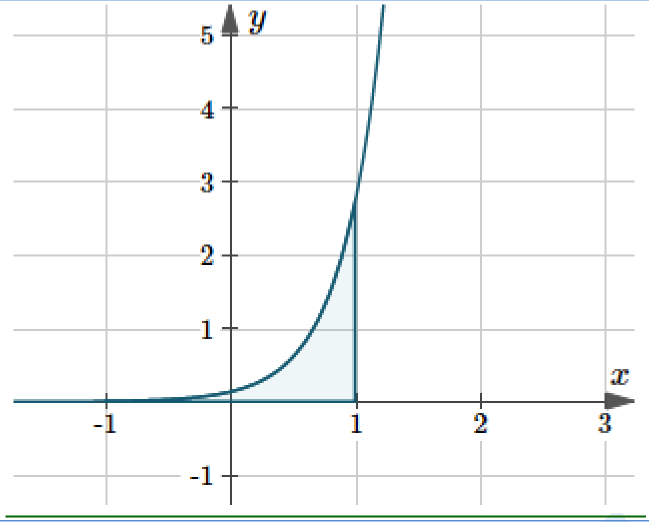
$$\int_{-1}^{1} e^{-(2-3x)}\, dx = \int_{-1}^{1} e^{3x-2}\, dx$$

Đặt $u = 3x - 2$, khi đó $du = 3\, dx$

Vậy:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} e^{3x-2}\, dx &= \frac{1}{3}(e^{3x-2})|_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{3}(e^{1} - e^{-5}) \\ &= 0.9038\end{aligned}$$

Dưới đây là đồ thị hàm số $y = \frac{1}{e^{2-3x}}$:



Vùng làm mờ là tích phân ta vừa tìm

Bài tập 4: Tìm phương trình đường cong, biết $\frac{dy}{dx} = \sqrt{e^{x+3}}$ và đường cong đi qua điểm $(1; 0)$.

Trả lời bài tập 4

Ta cần tìm:

$$y = \int \sqrt{e^{x+3}}\, dx$$

và thay các giá trị điều kiện để tìm phương trình đường cong.

Đặt $u = x + 3$, khi đó $du = dx$. Biểu diễn tích phân:

$$\begin{aligned} y &= \int \sqrt{e^{x+3}}\, dx \\ &= \int \sqrt{e^{u}}\, du \\ &= \int e^{u/2}\, du \\ &= 2e^{u/2} + K \\ &= 2e^{(x+3)/2} + K \end{aligned}$$

Bây giờ, đường cong đi qua điểm $(1; 0)$, điều này có nghĩa khi $x = 1$ thì $y = 0$. Vậy:

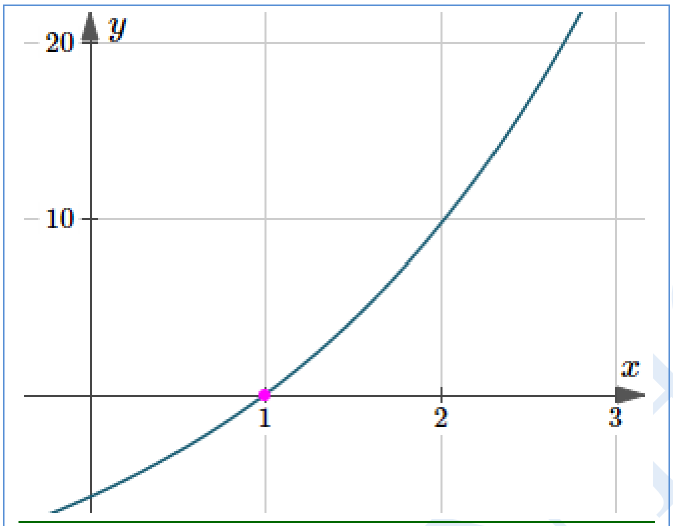
$$0 = 2e^2 + K$$

cho ta $K = -2e^2$.

Vậy phương trình đường cong là:

$$y = 2e^{\frac{(x+3)}{2}} - 2e^2$$

$$= 2\left(e^{\frac{(x+3)}{2}} - e^2\right)$$

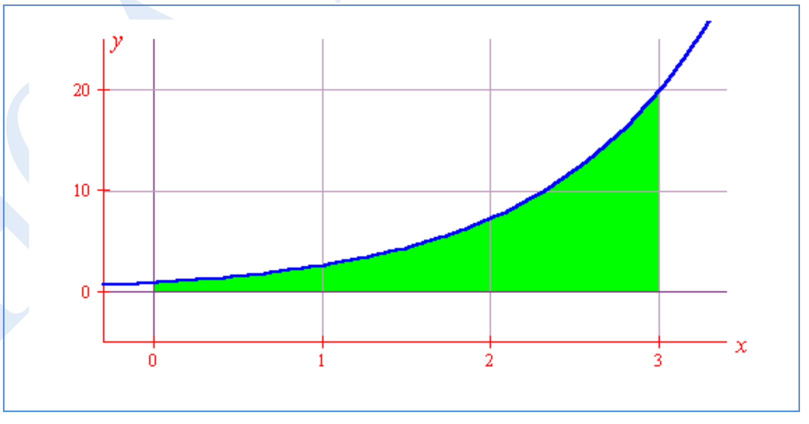


Đồ thị đường cong ta vừa tìm, cho thấy đường cong này đi qua điểm $(1; 0)$

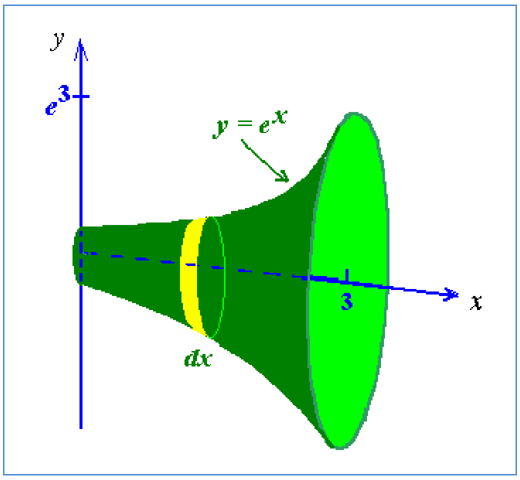
II. ỨNG DỤNG: Thể tích khối tròn xoay

Hình phẳng bao bởi đường cong $y = e^x$, trục x và hai cận $x = 0$ và $x = 3$ xoay quanh trục x. Tìm thể tích khối tròn xoay tạo thành.

Trả lời



Khi miền phẳng được làm nổi màu xoay quanh trục x hết 360°, ta được:



Áp dụng công thức tính thể tích khối tròn xoay, ta được:

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^3 (e^x)^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^3 e^{2x}\, dx$$

$$= \pi \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) \Big|_0^3$$

$$= \left(\frac{e^6 - 1}{2} \right) \pi \text{ đơn vị}^3$$

$$= 632.1 \text{ đơn vị}^3$$

BÀI 3.3.5 CÔNG THỨC TÍNH TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Ta có được một số công thức tính tích phân hàm lượng giác bằng cách làm ngược lại công thức vi phân hàm lượng giác.

$$\int \sin(u)\,du = -\cos(u) + K$$
$$\int \cos(u)\,du = \sin(u) + K$$
$$\int \sec^2(u)\,du = \tan(u) + K$$
$$\int \csc^2(u)\,du = -\cot(u) + K$$

Ta sẽ áp dụng các công thức trên để tính một số tích phân sau.

Lưu ý: Mọi số đo góc đều tính theo radian. Công thức này không dùng trong độ.

Ví dụ 1: Tính tích phân:

$$\int e^x \csc^2(e^x)\,dx$$

Trả lời ví dụ 1

$$\int e^x \csc^2(e^x)\,dx$$

Đặt $u = e^x$, khi đó $du = e^x\,dx$.

$$\int e^x \csc^2(e^x)\,dx$$
$$= \int \csc^2(u)\,du$$
$$= -\cot(u) + K$$
$$= -\cot(e^x) + K$$

Ví dụ 2: Tính tích phân:

$$\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$$

Trả lời ví dụ 2

$$\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$$

Đặt $u = \frac{1}{x}$, khi đó $du = -\frac{1}{x^2}dx$.

$$\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx$$

$$= -\int \sin(u)\,du$$

$$= \cos(u) + K$$

$$= \cos\left(\frac{1}{x}\right) + K$$

I. TÍCH PHÂN CỦA $\sec(x)$, $\csc(x)$

Ta có thể thu được kết quả tính tích phân, đơn giản bằng cách làm ngựợi quy trình vi phân.

$$\int \sec(u)\tan(u)\,du = \sec(u) + K$$
$$\int \csc(u)\cot(u)\,du = \csc(u) + K$$

Ví dụ 3: Tính tích phân:

$$\int \csc(2x)\cot(2x)\,dx$$

Trả lời ví dụ 3

$$\int \csc(2x)\cot(2x)\,dx$$

Đặt $u = 2x$, khi đó $du = 2\,dx$.

$$\int \csc(2x)\cot(2x)\,dx$$

$$= \int \csc(u)\cot(u)\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \csc(u)\cot(u)\,du$$

$$= \frac{1}{2}(-\csc(u)) + K$$

$$= -\frac{1}{2}\csc(2x) + K$$

II. TÍCH PHÂN CỦA $\tan(x)$; $\cot(x)$

Bây giờ, nếu ta muốn tìm $\int \tan(x)\,dx$, ta lưu ý rằng:

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$$

Đặt $u = \cos(x)$, khi đó $du = -\sin(x)\,dx$. Tích phân của chúng ta thành:

$$\int \tan(x)\,dx$$

$$= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$$

$$= -\int \frac{du}{u}$$

$$= -\ln(|u|) + K$$

$$= -\ln(|\cos(x)|) + K$$

Tương tự, ta có thể chứng minh công thức:

$$\int \cot(x)\,dx = \ln(|\sin(x)|) + K$$

III. BẢNG CÔNG THỨC TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

$$\int \tan(u)\,du = -\ln(|\cos(u)|) + K$$
$$\int \cot(u)\,du = \ln(|\sin(u)|) + K$$
$$\int \sec(u)\,du = \ln(|\sec(u) + \tan(u)|) + K$$
$$\int \csc(u)\,du = \ln(|\csc(u) - \cot(u)|) + K$$

Ví dụ 4: Tính tích phân:

$$\int x^2 \cot(x^3)\,dx$$

Trả lời ví dụ 4

$$\int x^2 \cot(x^3)\,dx$$

Đặt $u = x^3$, khi đó $du = 3x^2\,dx$.

$$\int x^2 \cot(x^3)\,dx$$

$$= \int \cot(u)\frac{du}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\int \cot(u)\,du$$

$$=\frac{1}{3}\ln(|\sin(u)|)+K$$

$$=\frac{1}{3}\ln(|\sin(x^3)|)+K$$

Ví dụ 5: Tính tích phân:

$$6\int_0^1 \tan\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

Trả lời ví dụ 5

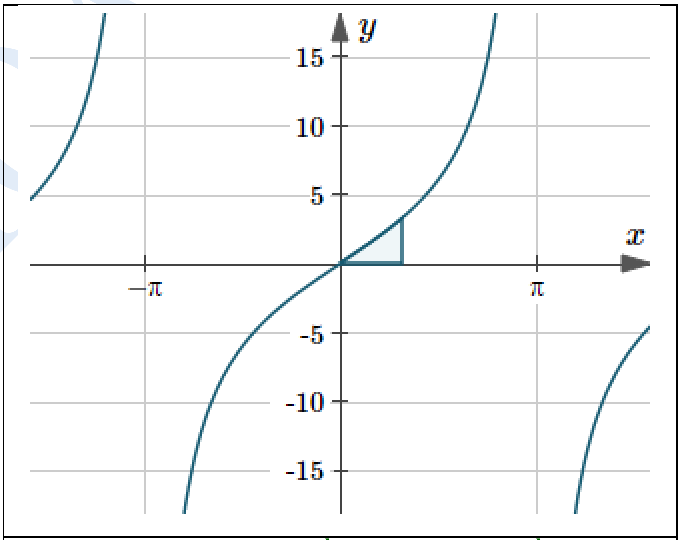
$$6\int_0^1 \tan\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

Đặt $u=\frac{x}{2}$, khi đó $du=\frac{1}{2}dx$.

$$6\int_0^1 \tan\left(\frac{x}{2}\right)dx = 6(-2)\left(\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right)\Big|_0^1 = 1.5670$$

Đương nhiên, x tính theo radian.

Đây là đường cong $y=6\tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

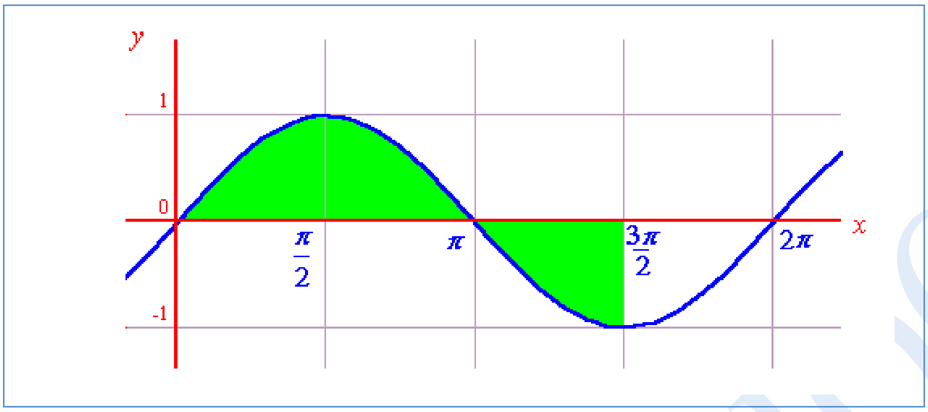


Vùng làm mờ là phần diện tích ta cần tìm

Ví dụ 6: Tính diện tích dưới đường cong $y=\sin(x)$ từ $x=0$ đến $x=\frac{3\pi}{2}$.

Trả lời ví dụ 6

Đầu tiên ta vẽ hình trước:



Ta cần tách tích phân ra làm 2 phần vì có một phần của đừng cong nằm trên trục x (phần từ 0 đến π), phần còn lại nằm dưới trục x (phần từ π đến $\frac{3\pi}{2}$ và ta cần lấy trị tuyệt đối).

$$\text{Diện tích} = \int_0^\pi \sin(x)\,dx + \left|\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \sin(x)\,dx\right|$$

$$= (-\cos(x))\big|_0^\pi + \left|(-\cos(x))\big|_\pi^{\frac{3\pi}{2}}\right|$$

$$= 2 + |-1|$$

$$= 3 \text{ đơn vị}^2$$

IV. BÀI TẬP: Tính các tích phân:

Bài tập 1:

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}dx$$

Trả lời bài tập 1

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}dx$$

Cần nhớ rằng $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$$\int \frac{\sin(2x)}{\cos^2(x)}dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}dx$$

$$= 2\int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$= 2\int \tan x \, dx$$

$$= -2\ln|\cos x| + K$$

Bài tập 2:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} (1 + \sec x)^2 \, dx$$

Trả lời bài tập 2

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} (1 + \sec x)^2 \, dx$$

Bây giờ:

$$(1 + \sec x)^2 = 1 + 2\sec x + \sec^2 x$$

Vậy:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \sec x)^2 \, dx$$

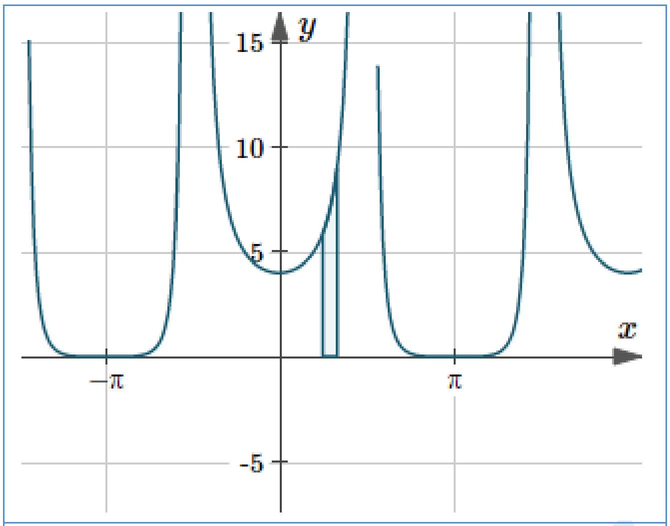
$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} (1 + 2\sec x + \sec^2 x) \, dx$$

$$= (x + 2\ln|\sec x + \tan x| + \tan x)|_{\pi/4}^{\pi/3}$$

$$= \left(\left(\frac{\pi}{3} + 2(1.31696) + 1.7321\right) - \left(\frac{\pi}{4} + 2(0.88137) + 1\right)\right)$$

$$= 1.8651$$

Đây là đường cong $y = (1 + \sec x)^2$:



Vùng làm mờ là tích phân ta cần tìm

Bài tập 3: Cho cường độ dòng điện trong mạch điện là $i = 110\cos(377t)$. Tìm biểu thức cho hiệu điện thế theo thời gian đi qua tụ điện có điện dung $500\ \mu F$, biết hiệu điện thế ban đầu là 0.

Chứng minh rằng hiệu điện thế đi qua tụ điện vuông pha với cường độ dòng điện.

Ta cần công thức sau, sử dụng bên điện học, biểu diễn hiệu điện thế đi qua tụ điện, với C là điện dung.

$$V_C = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

Trả lời bài tập 3

Cần nhớ rằng $\mu = 10^{-6}$.

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{1}{C}\int i\,dt \\ &= \frac{1}{500\times 10^{-6}}\int 110\cos(377t)\,dt \\ &= \frac{220\,000}{377}\sin(377t) + K \\ &= 583.6\sin(377t) + K \end{aligned}$$

Khi $t = 0$ thì $V_C = 0$, vậy $K = 0$.

Vậy ta có:

$$V_C = 583.6\sin(377t)$$

Bây giờ, ta sử dụng công thức $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$, ta có:

$$\cos\left(377t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(377t)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(377t)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \sin(377t)$$

Điều này cho thấy rằng $583.6\sin(377t)$ và $110\cos(377t)$ lệch pha $90^o = \frac{\pi}{2}$ (hay vuông pha)

Bài tập 4: Một lực xác định bởi hàm số theo khoảng cách so với điểm xuất phát như sau:

$$F = \frac{2 + \tan(x)}{\cos(x)}$$

Biểu diễn công sinh ra bởi lực là hàm số theo x, biết khi $x = 0$ thì công $= 0$.

Trả lời bài tập 4

Từ bài "*Công sinh ra bởi lực biến thiên*", ta có:

$$\text{Công} = \int F\,dx$$

Vậy ta cần tính:

$$W = \int \frac{2 + \tan(x)}{\cos(x)}dx$$

Vì:

$$\frac{2 + \tan(x)}{\cos(x)} = \frac{2}{\cos(x)} + \frac{\tan(x)}{\cos(x)}$$
$$= 2\sec(x) + \tan(x)\sec(x)$$

Thay vào biểu thức trong dấu tích phân, ta được:

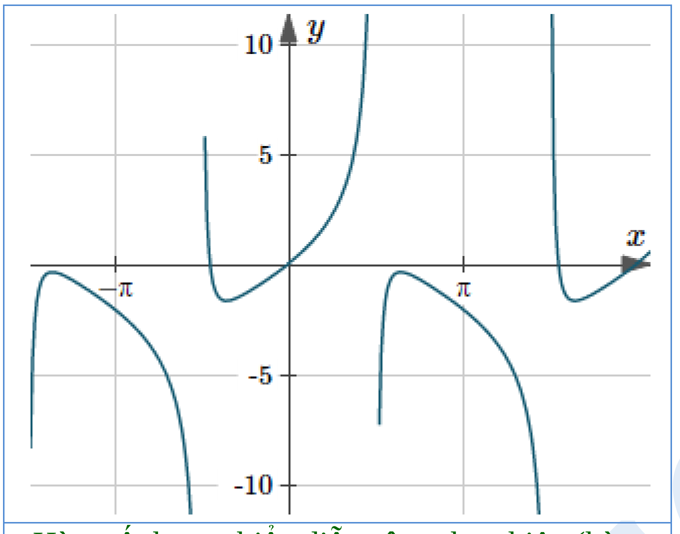
$$W = \int (2\sec(x) + \tan(x)\sec(x))\,dx$$
$$= 2\ln|\sec(x) + \tan(x)| + \sec(x) + K$$

Vì $W = 0$ khi khi $x = 0$, ta có:

$$0 = 2\ln|\sec(0) + \tan(0)| + \sec(0) + K$$
$$0 = 2(0) + 1 + K$$

Vậy $K = -1$ nên ta có:

$$W = 2\ln|\sec(x) + \tan(x)| + \sec(x) - 1$$



Hàm số theo x biểu diễn công thực hiện (hàm số ta vừa tìm)

BÀI 3.3.6 MỘT SỐ CÔNG THỨC KHÁC TÍNH TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

Ta có thể sử dụng một số công thức lượng giác để đơn giản hóa quy trình tính tích phân.

Một số công thức lượng giác chính:

$$\begin{aligned}&\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1\\&1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)\\&1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)\\&2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)\\&2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)\end{aligned}$$

Ta sẽ sử dụng những công thức này để biến tích phân về dạng đơn giản hơn, hay đưa về dạng có thể tính "thủ công".

I. TÍNH TÍCH PHÂN CỦA TÍCH CÁC HÀM LŨY THỪA CỦA SINE VÀ COSINE – LŨY THỪA LẺ

Để tính tích phân tích các hàm lũy thừa của sine và cosine, ta dùng:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

nếu tồn tại một giá trị lũy thừa là số lẻ.

Ví dụ 1: Tính tích phân:

$$\int 3\cos^3(x)\,dx$$

Trả lời ví dụ 1

$$\begin{aligned}&\int 3\cos^3(x)\,dx\\&= 3\int (\cos^2(x))\cos(x)\,dx\\&= 3\int (1-\sin^2(x))\cos(x)\,dx\\&= 3\int (\cos(x) - \sin^2(x)\cos(x))\,dx\end{aligned}$$

Đặt $u = \sin x$, khi đó $du = \cos x\ \ dx$, ta được:

$$\begin{aligned}&= 3\left(\sin(x) + K_1 - \int u^2\,du\right)\\&= 3\left(\sin(x) - \frac{u^3}{3} + K\right)\end{aligned}$$

$$= 3\left(\sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + K\right)$$

II. TÍNH TÍCH PHÂN CỦA TÍCH CÁC HÀM LŨY THỪA CỦA SIN VÀ COSIN – LŨY THỪA CHẴN

Ta dùng công thức:

$$2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$$

Hay công thức:

$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$

nếu giá trị lũy thừa của $\sin x$ hay $\cos x$ là chẵn.

Ví dụ 2: Tính tích phân:

$$\int \cos^2(2x)\, dx$$

Trả lời ví dụ 2

$$\int \cos^2(2x)\, dx$$

Đặt $u = 2x$, khi đó $du = 2\, dx$.

Điều này dẫn đến:

$$\int \cos^2(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos^2(u)\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1 + \cos(2u)}{2}\, du$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + \cos(2u))\, du$$

$$= \frac{1}{4}\left(u + \frac{\sin(2u)}{2}\right) + K$$

$$= \frac{1}{4}\left(2x + \frac{\sin\big(2(2x)\big)}{2}\right) + K$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin(4x)}{2} + K$$

Ví dụ 3: Tính tích phân.

$$6\int \cot^3(x)\, dx$$

Trả lời ví dụ 3

Ta có:

$$6\int \cot^3(x)\,dx$$

$$= 6\int (\cot^2(x))\cot(x)\,dx$$

$$= 6\int (\csc^2(x) - 1)\cot(x)\,dx$$

$$= 6\left(\int \csc^2(x)\cot(x)\,dx - \int \cot(x)\,dx\right)$$

Ta tính tích phân $\int \csc^2(x)\cot(x)\,dx$ trước.

Đặt $u = \cot(x)$, khi đó $du = -\csc^2(x)\,dx$.

Vậy:

$$\int \csc^2(x)\cot(x)\,dx$$

$$= -\int u\,du$$

$$= -\frac{u^2}{2} + C$$

$$= -\frac{\cot^2 x}{2} + C$$

Với tích phân thứ hai, từ bảng công thức, ta có:

$$\int \cot(x)\,dx = \ln(|\sin(x)|) + C$$

Quay lại câu hỏi chính:

$$6\int \cot^3(x)\,dx$$

$$= 6\left(\int \csc^2(x)\cot(x)\,dx - \int \cot(x)\,dx\right)$$

$$= 6\left(-\frac{\cot^2(x)}{2} + \ln(|\sin(x)|)\right) + K$$

$$= -3\cot^2(x) - 6\ln(|\sin(x)|) + K$$

III. BÌNH PHƯƠNG TRUNG BÌNH CĂN

Bình phương trung bình căn (root mean square – rms) của hàm y theo biến x xác định bởi công thức:

$$y_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2\,dx}$$

với T là chu kỳ của y.

Một ứng dụng thường gặp của công thức này đó là dòng điện hiệu dụng. Đây là giá trị của dòng điện một chiều có thể cung cấp cùng một lượng năng lượng nhiệt trong cùng một khoảng thời gian so với dòng điện xoay chiều, được dung trong thiết kế lò sưởi.

Ví dụ 4: Tìm bình phương trung bình căn của $i = 3 + 2\cos(t)$.

Trả lời ví dụ 4

Trong trường hợp này, $T = 2\pi$.

Vậy,

$$i_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (3 + 2\cos(t))^2\,dt}$$

Bây giờ,

$$(3 + 2\cos(t))^2 = 9 + 12\cos(t) + 4\cos^2(t)$$

Vì $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ nên $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$.

Vậy,

$$(3 + 2\cos(t))^2$$

$$= 9 + 12\cos(t) + 4\left(\frac{\cos(2t) + 1}{2}\right)$$

$$= 11 + 12\cos(t) + 2\cos(2t)$$

Cho nên,

$$\int_0^T i^2\,dt = \int_0^{2\pi} (11 + 12\cos(t) + 2\cos(2t))\,dt$$

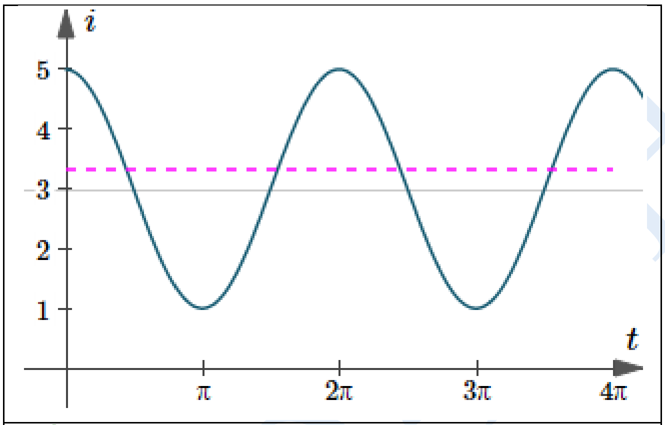
$$= (11t + 12\sin(t) + \sin(2t))\big|_0^{2\pi}$$

$$= 22\pi$$

Và cuối cùng,

$$i_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{2\pi} i^2\,dt} = \sqrt{\frac{22\pi}{2\pi}} = \sqrt{11}$$

Đây là đồ thị dòng điện theo hàm cosine và dòng điện hiệu dụng bình phương trung bình căn:



Đồ thị $i(t) = 3 + 2\cos(t)$ với dòng điện hiệu dụng bình phương trung bình căn là đường đứt quãng

Ví dụ 5: Với cường độ dòng điện i cho bởi $i = i_0 \sin(\omega t)$, chứng minh rằng bình phương trung bình căn của một chu kỳ là $\frac{i_0}{\sqrt{2}}$.

Trả lời ví dụ 5

Trong trường hợp này,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Vậy,

$$i_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T} i^2\,dt}$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (i_0\sin(\omega t))\,dt}$$

Ta xử lý tích phân trước, ta có:

$$\sin^2(\omega t) = \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (1-\cos(2\omega t))\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\right)\Bigg|_0^{\frac{2\pi}{\omega}}$$

$$= \frac{\pi}{\omega}$$

Vậy,

$$i_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{\omega(i_0)^2}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t)\,dt}$$

$$= \sqrt{\frac{\omega(i_0)^2}{2\pi}\frac{\pi}{\omega}}$$

$$= \sqrt{\frac{(i_0)^2}{2}}$$

$$= \frac{i_0}{\sqrt{2}}$$

Đây chính là điều mà đề bài yêu cầu ta cần làm rõ.

IV. BÀI TẬP: Tính các tích phân sau:

Bài tập 1:

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\,\sin^3 x\,dx$$

Trả lời bài tập 1

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\,\sin^3 x\,dx$$

Ta viết $\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1 - \cos^2 x)(\sin x)$

Ta tính nguyên hàm trước:

$$\begin{aligned} &\sqrt{\cos x}\sin^3 x \\ &= \cos^{1/2} x\,(1 - \cos^2 x)(\sin x) \\ &= \left(\cos^{1/2} x - \cos^{5/2} x\right)(\sin x) \end{aligned}$$

Đặt $u = \cos x$, khi đó $du = -\sin x\, dx$

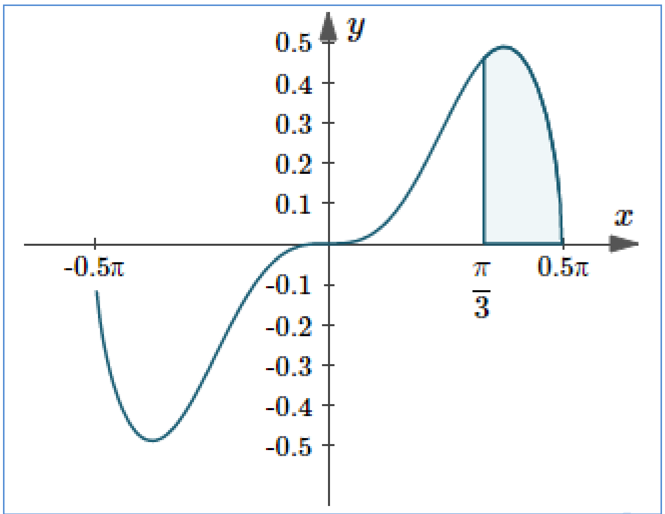
Vậy:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\cos x}\sin^3 x\, dx &= \int \left(\cos^{1/2} x - \cos^{5/2} x\right)(\sin x)\, dx \\ &= -\int \left(u^{1/2} - u^{5/2}\right) du \\ &= -\frac{2u^{3/2}}{3} + \frac{2u^{7/2}}{7} + K \\ &= -\frac{2\cos^{3/2} x}{3} + \frac{2\cos^{7/2} x}{7} + K \end{aligned}$$

Bây giờ ta tính tích phân xác định dựa vào nguyên hàm:

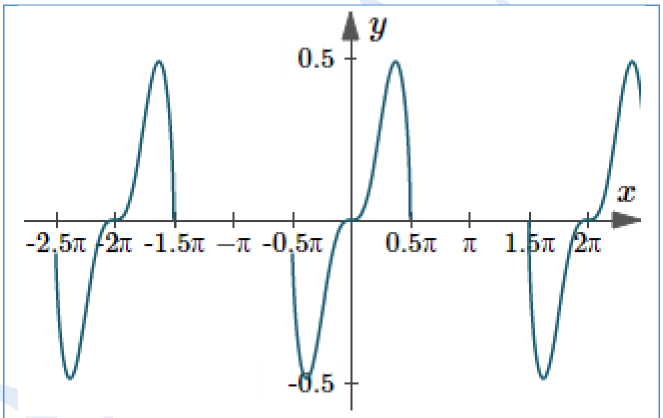
$$\begin{aligned} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\sin^3 x\, dx &= \left(-\frac{2\cos^{3/2} x}{3} + \frac{2\cos^{7/2} x}{7}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi/2} \\ &= (0 + 0) - (-0.23570 + 0.02525) \\ &= 0.2014 \end{aligned}$$

Đáp án của bài tập 1 là diện tích dưới đường cong $y(x) = \sqrt{\cos x}\sin^3 x$ giữa $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$. Dưới đây là đồ thị:



Đồ thị hàm số $y(x) = \sqrt{\cos x} \sin^3 x$, phần diện tích cần tính nằm giữa $x = \frac{\pi}{3}$ và $x = \frac{\pi}{2}$

Thu nhỏ đồ thị ta sẽ thấy chu kỳ của hàm số là 2π. Có những chỗ trống trong đồ thị do ảnh hưởng của $\sqrt{\cos x}$ (ta không có căn bậc 2 của số âm).



Đồ thị hàm số $y(x) = \sqrt{\cos x} \sin^3 x$, thu nhỏ đồ thị sẽ thấy chu kỳ tự nhiên của hàm số này

Bài tập 2:

$$\int_0^1 \sin^2(4x)\, dx$$

Trả lời bài tập 2

$$\int_0^1 \sin^2(4x)\, dx$$

Ta nhớ rằng $2\sin^2(\theta) = 1 - \cos(2\theta)$

Trong bài này, ta có $\theta = 4x$ nên:

$$2\sin^2(4x) = 1 - \cos\big(2(4x)\big) = 1 - \cos(8x)$$

Vậy $\sin^2(4x) = \frac{1-\cos(8x)}{2}$

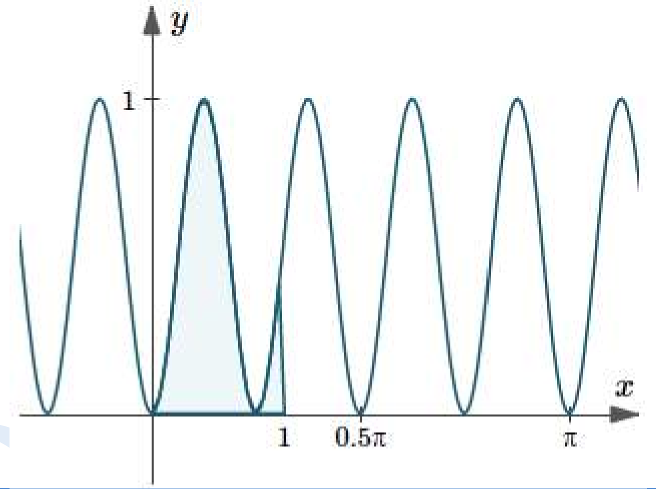
$$\int_0^1 \sin^2(4x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos(8x))\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(8x)}{8}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{0.9894}{8}\right) - (0-0)\right]$$

$$= 0.4382$$

Đây là đồ thị tích phân ta vừa tìm, bao gồm phần diện tích dưới đường cong $y = \sin^2(4x)$



Đồ thị hàm số $y(x) = \sin^2(4x)$, bao gồm phần diện tích dưới đường cong từ $x = 0$ đến $x = 1$

Bài tập 3:

$$\int \cot(4x)\csc^4(4x)\,dx$$

Trả lời bài tập 3

$$\int \cot(4x)\csc^4(4x)\,dx$$

Ta viết biểu thức trong dấu tích phân như sau:

$$\cot(4x)\csc^4(4x)\,dx = (\csc^3(4x))\cot(4x)\csc(4x)$$

Khi đó, đặt $u = \csc(4x)$ ta được $du = -4\csc(4x)\cot(4x)\,dx$

Như vậy $-\frac{du}{4} = \csc(4x)\cot(4x)\,dx$

Bây giờ ta có thể biểu diễn lại tích phân:

$$\begin{aligned}\int \cot(4x)\csc^4(4x)\,dx &= \int (\csc^3(4x))\cot(4x)\csc(4x)\,dx \\ &= -\frac{1}{4}\int u^3\,du \\ &= -\frac{u^4}{16} + K \\ &= -\frac{\csc^4(4x)}{16} + K\end{aligned}$$

Bài tập 4:

$$\int \sqrt{\tan x}\sec^4 x\,dx$$

Trả lời bài tập 4

Nhắc lại rằng $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

Vậy ta có thể viết phần biểu thức trong dấu tích phân là:

$$\begin{aligned}\sqrt{\tan x}\sec^4 x &= \left(\tan^{1/2} x\right)\sec^2 x\sec^2 x \\ &= \left(\tan^{1/2} x\right)(1 + \tan^2 x)\sec^2 x \\ &= \left(\tan^{1/2} x + \tan^{5/2} x\right)\sec^2 x\end{aligned}$$

Tiếp theo, ta đặt $u = \tan x$, thu được $du = \sec^2 x\,dx$

Vậy tích phân trở thành:

$$\begin{aligned}\int \left(\tan^{1/2} x + \tan^{5/2} x\right)\sec^2 x\,dx &= \int \left(u^{1/2} + u^{5/2}\right)du \\ &= \frac{2}{3}u^{3/2} + \frac{2}{7}u^{7/2} + K \\ &= \frac{2}{3}\tan^{3/2} x + \frac{2}{7}\tan^{7/2} x + K\end{aligned}$$

Bài tập 5:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2}{1+\sin(x)}dx$$

Trả lời bài tập 5

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2}{1+\sin(x)}dx$$

Ta cần viết lại tích phân này bằng cách sử dụng những kỹ thuật thường gặp. Ta lấy tử và mẫu nhân với biểu thức liên hợp của mẫu (biểu thức liên hợp ngược dấu với biểu thức ban đầu. Trong bài này là dấu trừ).

Ta sẽ sử dụng kết quả sau:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\frac{1}{1+\sin(x)} = \frac{1}{1+\sin(x)} \times \frac{1-\sin(x)}{1-\sin(x)}$$

$$= \frac{1-\sin(x)}{1-\sin^2(x)}$$

$$= \frac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \sec^2(x) - \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

Bây giờ ta tính tích phân. Đặt $u = \cos(x)$ của biểu thức bên phải, ta được $du = -\sin(x)\, dx$

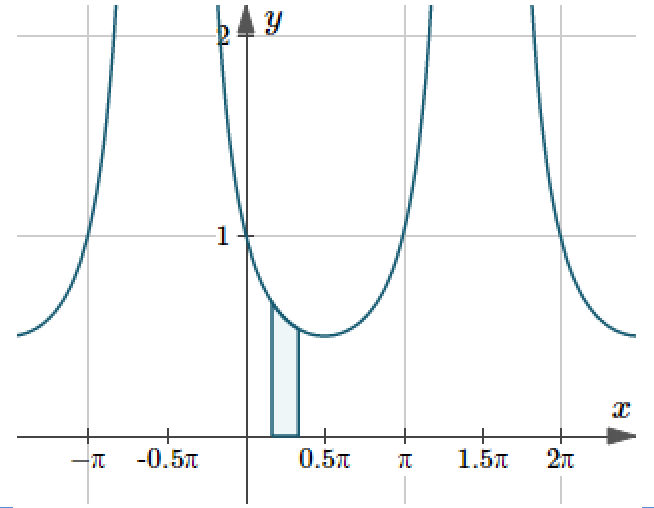
Vậy:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2}{1+\sin(x)}dx = 2\int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\sec^2(x) - \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\right)dx$$

$$= 2\left(\tan(x) - \frac{1}{\cos(x)}\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$$= 2\big((1.73215 - 2) - (0.57735 - 1.15470)\big)$$

$$= 0.6190$$



Đồ thị hàm số $y(x) = \frac{2}{1+\sin(x)}$, bao gồm phần diện tích dưới đường cong từ $x = \frac{\pi}{6}$ đến $x = \frac{\pi}{3}$

V. ỨNG DỤNG – CHIỀU DÀI ĐƯỜNG CONG

Độ dài s của một cung trên đường cong $y = f(x)$ từ $x = a$ đến $x = b$ xác định bởi công thức:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx\,.$$

Xác định độ dài đường cong $y = \ln(\cos(x))$ từ $x = 0$ đến $x = \frac{\pi}{3}$.

Trả lời

Đường cong trong bài này là $y = \ln(\cos(x))$

Ta tính đạo hàm của đường cong này:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

Trong bài này, ta sẽ sử dụng công thức sau:

$$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$$

Áp dụng công thức, ta được:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + (-\tan(x))^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/3} \sqrt{1+\tan^2(x)}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/3} \sqrt{\sec^2(x)}\,dx$$

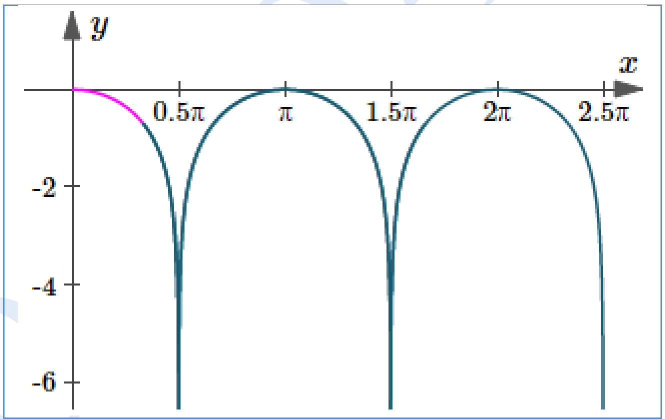
$$= \int_0^{\pi/3} \sec(x)\,dx$$

$$= (\ln|\sec(x)+\tan(x)|)\Big|_0^{\pi/3}$$

$$= \ln\left|\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| - \ln|1+0|$$

$$= 1.317$$

Đây là đồ thị minh họa chiều dài cung ta vừa tìm. Tôi cần lấy trị tuyệt đối giá trị $\cos(x)$, nếu không thì đồ thị sẽ có những đường đứt đoạn ở những chỗ $\cos(x)$ có giá trị âm.



Đồ thị hàm số $y(x) = \ln|\cos(x)|$ với chiều dài đường cong ta vừa tìm có màu đỏ tươi

BÀI 3.3.7 CÔNG THỨC TÍNH TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC NGƯỢC

Sử dụng những gì ta đã biết khi tính đạo hàm hàm lượng giác ngược và bằng cách thực hiện ngược quy trình vi phân, ta thu được các tích phân sau, với u là hàm số theo x, tức $u = f(x)$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + K$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}} du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + K$$

Lưu ý: Các máy tính cầm tay thường có nút cho biểu thức $\sin^{-1}$ và $\tan^{-1}$, nhưng việc sử dụng chúng khá rắc rối vì chúng là hàm ngược chứ không phải hàm nghịch đảo. Ta có thể viết biểu thức này thành arcsin và arctan như sau:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + K$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + K$$

Ví dụ 1: Tính tích phân:

$$\int \frac{1}{\sqrt{49 - x^2}} dx$$

Trả lời ví dụ 1

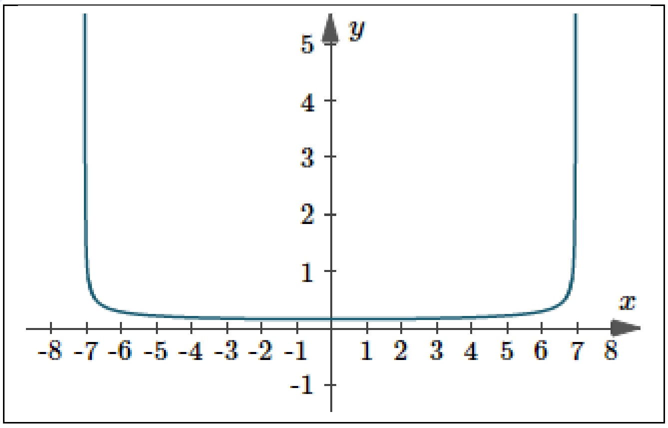
Áp dụng công thức trên, ta có:

$$\int \frac{1}{\sqrt{49 - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{7^2 - x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{7}\right) + K$$

Ta có thể viết lại đáp án thành:

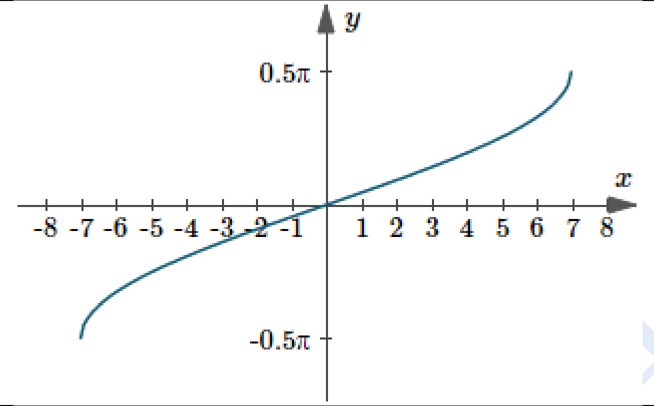
$$\arcsin\left(\frac{x}{7}\right) + K$$

Đây là đồ thị hàm số ta vừa tính tích phân



Đồ thị hàm số $y(x) = \frac{1}{\sqrt{49-x^2}}$

Đồ thị tiếp theo là đồ thị nghiệm riêng của tích phân ta vừa tìm, với $K = 0$.



Đồ thị hàm số $y(x) = \arcsin\left(\frac{x}{7}\right)$

Ví dụ 2: Tính tích phân:

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{9-4x^2}}dx$$

Trả lời ví dụ 2

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{9-4x^2}}dx$$

Đặt $u = 2x$, khi đó $du = 2\,dx$.

Tích phân của ta trở thành:

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{9-4x^2}}dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{\sqrt{3^2-u^2}}du$$

$$= \frac{\sin^{-1}(u)}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{\sin^{-1}(2x)}{3}\Bigg|_0^1$$

$$= 0.7297$$

Ta có thể làm ngắn hơn bằng cách sau khi đặt biến u và tính nguyên hàm, ta không trả kết quả về biến x.

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{9-4x^2}}dx$$

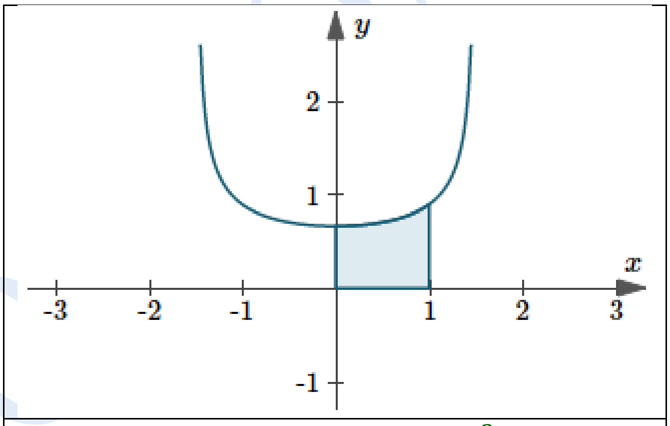
$$= \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{3^2-u^2}}du$$

$$= \left.\frac{\sin^{-1}(u)}{3}\right|_0^2$$

$$= 0.7297$$

Lưu ý phải đổi cận khi dx thay thành du trng quá trình tính tích phân. Vì ta đặt $u = 2x$ nên cận của x từ $x = 0$ đến $x = 1$ chuyển theo u thành $u = 0$ và $u = 2$.

Đây là đồ thị tích phân ta vừa tìm. Tích phân này biểu diễn phần diện tích dưới đường cong $y(x) = \frac{2}{\sqrt{9-4x^2}}$ với $0 < x < 1$.



Đồ thị hàm số $y(x) = \frac{2}{\sqrt{9-4x^2}}$

Ví dụ 3: Tìm diện tích hình phẳng bao bởi đường cong $y = \frac{1}{1+x^2}$ và đường $x = 0$; $y = 0$ và $x = 2$.

Trả lời ví dụ 3

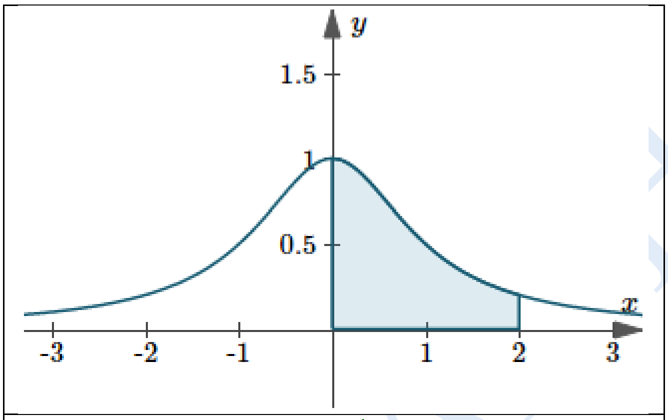
Đường cong $y = \frac{1}{1+x^2}$ nằm hoàn toàn trên trục x với mọi giá trị x. Vậy diện tìm diện tích, ta tính tích phân. (Nếu một phần đường cong nằm dưới trục x, ta cần chia tích phân ra thành hai phần khác nhau và lấy trị tuyệt đối).

$$\text{Diện tích} = \int_0^2 \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \tan^{-1}(x)|_0^2$$

$$= 1.107\ 1 \text{ đơn vị}^2$$

Đây là phần diện tích ta vừa tìm:



Đồ thị hàm số $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ với phần diện tích giữa $0 < x < 2$

Thận trọng: Có rất nhiều kiểu tích phân thoạt nhìn trông tương tự như công thức ở trên như thực ra là khác.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx\,;\ \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\,;\ \int \frac{1}{1-x^2}dx\,;\ \dots$$

Ta sẽ phát triển thêm một số công thức để tính các tích phân này trong bài "*Tính tích phân bằng cách đặt ẩn lượng giác*".

BÀI TẬP: Tính các tích phân sau:

1)

$$\int \frac{3}{25+16x^2}dx$$

Trả lời 1)

Ta có thể viết lại tích phân thành:

$$\int \frac{3}{25+16x^2}dx = 3\int \frac{dx}{(5)^2+(4x)^2}$$

Từ công thức, ta cần $a = 5, u = 4x, du = 4\ dx$

Sắp xếp lại biểu thức cuối cùng, ta được $\frac{du}{4} = dx$

Bây giờ ta biểu diễn tích phân:

$$\int \frac{3}{25 + 16x^2} dx = \frac{3}{4} \int \frac{du}{(5)^2 + u^2}$$
$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \tan^{-1}\left(\frac{u}{5}\right) + K$$
$$= \frac{3}{20} \tan^{-1}\left(\frac{4x}{5}\right) + K$$

Ta cũng có thể viết lại đáp án thành:

$$\frac{3}{20} \arctan\left(\frac{4x}{5}\right) + K$$

2)

$$\int \frac{2}{x^2 + 8x + 17} dx$$

Trả lời 2)

$$\int \frac{2}{x^2 + 8x + 17} dx$$

Bây giờ:

$$x^2 + 8x + 7 = (x^2 + 8x + 16) + 1$$
$$= (x + 4)^2 + 1$$

Vậy nếu ta đặt $u = x + 4$, khi đó $du = dx$ và ta có:

$$\int \frac{2}{x^2 + 8x + 17} dx = 2 \int \frac{du}{u^2 + 1}$$
$$= 2 \tan^{-1} u + K$$
$$= 2 \tan^{-1}(x + 4) + K$$

Đương nhiên, ta có thể viết đáp án là $2 \arctan(x + 4) + K$

3)

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx$$

Trả lời 3)

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx$$

Đây không phải dạng của các công thức mới nêu ở đầu bài này, nhưng ta có thể biến hóa về dạng hữu ích.

Đầu tiên, ta nhận thấy rằng:

$$2x - x^2 = -(x^2 - 2x)$$

Ta cộng thêm 1 vào phía trước, sau đó trừ đi 1 ở biểu thức trong ngoặc:

$$= 1 - (x^2 - 2x + 1)$$

$$= 1 - (x - 1)^2$$

Với $a = 1, u = x - 1$ và $du = dx$, tích phân thành:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$= \arcsin u + K$$

$$= \arcsin(x - 1) + K$$

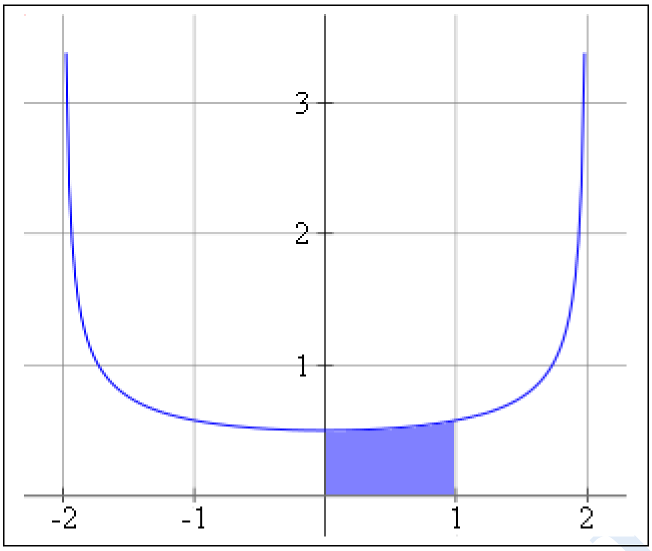
4) Tìm diện tích hình phẳng bao bởi đường cong $y\sqrt{4 - x^2} = 1$ và đường $x = 0; y = 0$ và $x = 1$.

Trả lời 4)

Ta có thể viết hàm số đường cong là:

$$y = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Đường cong này hoàn toàn nằm trên trục x với mọi giá trị x sao cho $-2 < x < 2$, xem đồ thị dưới đây ta thấy hàm số này không xác định với mọi giá trị x.



Vậy để tính diện tích yêu cầu (phần tô màu), ta đơn giản tính tích phân sau:

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

$$= \left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{6} - 0$$

$$= 0.5236$$

BÀI 3.3.8 TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Đôi khi ta gặp tích phân là tích của hai hàm số.Ta có thể tính tích phân tích ấy bằng cách sử dụng tích phân từng phần.

Nếu u và v là hàm số theo x, theo công thức đạo hàm tích hai hàm số mà ta đã học, ta có:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Chuyển vế, ta được:

$$u\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) - v\frac{du}{dx}$$

Tích phân theo biến x, ta được công thức tính tích phân từng phần:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Công thức này giúp ta biến đổi tích phân phúc tạp sang tích phân đơn giản hơn, ta cần chọn u và dv cẩn thận.

Lưu ý: Ta chọn hàm u sao cho $\frac{du}{dx}$ phải đơn giản hơn u.

Ưu tiên chọn u:

Khi bạn có một hàm số là tích của hai hàm số khác, khi tính tích phân, bạn sử dụng danh sách các thứ tự ưu tiên sau để đặt u:

(i) Đặt $u = \ln(x)$.

(ii) Đặt $u = x^n$.

(iii) Đặt $u = e^{nx}$.

Ví dụ 1: Tính tích phân:

$$\int x\sin(2x)\,dx$$

Hướng giải:

Ta cần chọn u. Dựa vào đề bài, ta thấy rằng ta không thể áp dụng danh sách các thứ tự ưu tiên ở trên.

Ta có thể đặt $u = x$ hay $u = 2x$. Tổng quát, ta chọn cái nào sao cho $\frac{du}{dx}$ trở nên đơn giản hơn u.

Trả lời ví dụ 1

Trong ví dụ này, ta chọn $u = x$ và dv sẽ là "phần còn lại" của tích phân, $dv = \sin(2x)\,dx$.

Ta có $u = x$ nên $du = dx$.

Đồng thời, $dv = \sin(2x)\,dx$, lấy tích phân, ta được:

$$v = \int \sin(2x)\,dx = -\frac{\cos(2x)}{2}$$

Thay 4 biểu thức này vào công thức tính tích phân từng phần, ta được:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x\sin 2x\,dx = (x)\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right) - \int \frac{-\cos 2x}{2}\,dx$$

$$= \frac{-x\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$

$$= \frac{-x\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) + K$$

$$= \frac{-x\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + K$$

Ví dụ 2: Tính tích phân:

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx$$

Trả lời ví dụ 2

Ta có thể đặt $u = x$ hay $u = \sqrt{x+1}$.

Một lần nữa, ta chọn cái nào sao cho $\frac{du}{dx}$ trở nên đơn giản hơn u, nên ta chọn $u = x$.

Khi đó $du = dx$. Với cách chọn này, dv phải là "phần còn lại" của tich phân: $dv = \sqrt{x+1}\,dx$.

$u = x$ nên $du = dx$.

$dv = \sqrt{x+1}\,dx$, lấy tích phân, ta được:

$$v = \int \sqrt{x+1}\,dx$$

$$= \int (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$$

Thay vào công thức tính tích phân từng phần, ta được:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{x+1}\,dx &= (x)\left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right) - \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\,dx \\
&= \frac{2x}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\int (x+1)^{3/2}\,dx \\
&= \frac{2x}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)\left[(x+1)^{5/2}\right] + K \\
&= \frac{2x}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + K
\end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tính tích phân:

$$\int x^2 \ln(4x)\,dx$$

Trả lời ví dụ 3

$$\int x^2 \ln(4x)\,dx$$

Ta có thể đặt $u = x^2$ hay $u = \ln(4x)$.

Sử dụng danh sách ưu tiên, ta chọn $u = \ln(4x)$, khi đó dv sẽ là phần còn lại của biểu thức tính tích phân $dv = x^2\,dx$.

Với $u = \ln(4x)$, ta được $du = \frac{1}{4}dx$.

Tính tích phân $dv = x^2\ dx$, ta thu được:

$$v = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$$

Thay vào công thức tính tích phân từng phần, ta được:

$$
\begin{aligned}
\int u\,dv &= u\,v - \int v\,du \\
&= (\ln 4x)\left(\frac{x^3}{3}\right) - \int\left(\frac{x^3}{3}\right)\frac{dx}{x} \\
&= \frac{x^3\ln 4x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\,dx \\
&= \frac{x^3\ln 4x}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right) + K \\
&= \frac{x^3\ln 4x}{3} - \frac{x^3}{9} + K
\end{aligned}
$$

Ví dụ 4: Tính tích phân:

$$\int x\sec^2(x)\,dx$$

Trả lời ví dụ 4

$$\int x\sec^2(x)\,dx$$

Ta chọn $u = x$ (vì điều này sẽ cho ta du đơn giản hơn), khi đó ta được $du = dx$.

Khi đó dv sẽ là $dv = \sec^2(x)\,dx$, lấy tích phân, ta được $v = \tan(x)$.

Thay vào công thức tính tích phân từng phần, ta được:

$$
\begin{aligned}
&\int x\sec^2(x)\,dx = \int u\,dv \\
&= uv - \int v\,du \\
&= x\tan(x) - \int \tan(x)\,dx \\
&= x\tan(x) + \ln(|\cos(x)|) + K
\end{aligned}
$$

Ví dụ 5: Tính tích phân:

$$\int x^2e^{-x}\,dx$$

Trả lời ví dụ 5

$$\int x^2e^{-x}\,dx$$

Quyền ưu tiên thứ 2 và thứ 3 trong danh sách ưu tiên chọn u nói rằng:

(ii) Đặt $u = x^n$.

(iii) Đặt $u = e^{nx}$.

Đề bài có cả lũy thừa của x cũng như hàm mũ. Nhưng ta đặt $u = x^2$ vì nó có mức cao hơn hàm mũ (bạn có thể đặt $u = e^{-x}$ và làm nếu muốn, và bạn sẽ thấy cách này rất phức tạp).

Vậy $u = x^2$, khi đó $du = 2x\,dx$.

Như vậy ta còn $dv = e^{-x}\,dx$, lấy tích phân, ta được $v = -e^{-x}$.

Thay vào công thức tính tích phân từng phần, ta được:

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-x}\,dx &= \int u\,dv\\ &= uv - \int v\,du\\ &= x^2(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})(2x)\,dx\\ &= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx\end{aligned}$$

Bây giờ, tích phân còn lại ta không thể ra ngay kết quả. Ta cần sử dụng tích phân từng phần thêm một lần nữa cho tích phân mới này.

Lần này, ta chọn $u = x$, khi đó $du = dx$.

Một lần nữa ta được $dv = e^{-x}\,dx$, lấy tích phân, ta được $v = -e^{-x}$.

Thay vào công thức tính tích phân từng phần, ta được:

$$\begin{aligned}\int xe^{-x}\,dx &= \int u\,dv\\ &= uv - \int v\,du\\ &= x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})\,dx\\ &= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx\\ &= -xe^{-x} - e^{-x}\end{aligned}$$

Ghép đáp án này với đáp án trước đó, ta có hướng đi sau cùng:

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-x}\,dx &= -x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x})\\ &= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + K\end{aligned}$$

Ví dụ 6: Tính tích phân:

$$\int \ln(x)\, dx$$

Trả lời ví dụ 6

$$\int \ln(x)\, dx$$

Danh sách ưu tiên ở trên nói rằng ta nên đặt u là biểu thức logarithm. (đường nhiên vì ta đâu còn lựa chọn nào khác).

Vậy, với $u = \ln(x)$, ta được $du = \frac{1}{x} dx$.

Khi đó dv đơn giản là $dv = dx$, lấy tích phân, ta được $v = x$.

Thay vào công thức tính tích phân từng phần, ta được:

$$\begin{aligned}\int \ln(x)\, dx &= \int u\, dv \\ &= uv - \int v\, du \\ &= x\ln(x) - \int x\, \frac{dx}{x} \\ &= x\ln(x) - \int dx \\ &= x\ln(x) - x + K\end{aligned}$$

Ví dụ 7: Tính tích phân:

$$\int \arcsin(x)\, dx$$

Trả lời ví dụ 7

$$\int \arcsin(x)\, dx$$

Sử dụng công thức tính tích phân từng phần, ta đặt:

$$u = \arcsin(x)$$

Khi đó,

$$du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

Vậy $dv = dx$, lấy tích phân, ta được $v = x$.

Bây giờ ta sử dụng:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Điều này dẫn đến:

$$\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Bây giờ, với tích phân còn lại, ta chỉ việc đặt ẩn phụ (tôi sẽ dùng một ẩn phụ p vì ta đã dùng ẩn u rồi.):

$$p = 1 - x^2$$

Vậy $dp = -2x\,dx$.

Điều này dẫn đến:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{p}}dp \\ &= -\frac{1}{2}\left(2\sqrt{p}\right) + K \\ &= -\sqrt{1-x^2} + K\end{aligned}$$

Vậy đáp án cuối cùng của ta là:

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)\,dx &= x\arcsin(x) - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) + K \\ &= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + K\end{aligned}$$

BÀI 3.3.9 TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN LƯỢNG GIÁC

Trong bài này, ta sẽ theo dõi cách tích một số tích phân có biểu thức giống như:

$$\int \frac{1}{(x^2+9)^{3/2}}\,dx$$

Dựa vào hàm số ta cần tính tích phân, ta thay một trong các biểu thức lượng giác sau để làm tích phân trở nên đơn giản:

(i) Với $\sqrt{a^2-x^2}$, ta dùng $x=a\sin(\theta)$.

(ii) Với $\sqrt{a^2+x^2}$, ta dùng $x=a\tan(\theta)$.

(iii) Với $\sqrt{x^2-a^2}$, ta dùng $x=a\sec(\theta)$.

Sau khi thay, ta sẽ được tích phân mới có thể tính dễ dàng hơn.

Cần lưu ý rằng ta không tính tích phân biểu thức hàm lượng giác (như ta đã làm trong bài "*Công thức tính tích phân hàm lượng giác cơ bản*" và "*Một số công thức khác tính tích phân hàm lượng giác*" và "*Tính tích phân hàm lượng giác ngược*").

Ở phần sau trong bài này, ta sẽ dùng các biểu thức sin, tan hay sec để thay thế để làm tích phân trở nên dễ tính hơn.

Ví dụ 1: Tính tích phân:

$$\int \frac{1}{(x^2+9)^{3/2}}\,dx$$

Trả lời ví dụ 1

Ta có thể viết lại đề bài thành:

$$\int \frac{1}{(x^2+3^2)^{3/2}}\,dx$$

Ta sẽ dùng vào cách thay thế thứ (ii) trong danh sách ở trên, đó là:

+ Với $\sqrt{a^2+x^2}$, ta dùng $x=a\tan(\theta)$.

+ với $a=3$.

Vậy ta sẽ đặt $x=3\tan(\theta)$, điều này dẫn đến $dx=3\sec^2(\theta)\,d\theta$.

Ta sẽ bắt đầu bước thay thế đầu tiên và làm cho mẫu số tích phân trở nên đơn giản trước khi tính tích phân.

Ta cần sử dụng tính chất sau:

$$(a^2)^{3/2}=a^3$$

Đây là một ví dụ cho tính chất trên:

$$9^{3/2} = \left(\sqrt{9}\right)^3 = 3^3 = 27$$

Đây là một tích chất lượng giác mà ta đã biết:

$$\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$$

Vậy ta được:

$$\begin{aligned}(x^2+9)^{3/2} &= ((3\tan(\theta))^2 + 9)^{3/2} \\ &= (9\tan^2(\theta) + 9)^{3/2} \\ &= [9(\tan^2(\theta)+1)]^{3/2} \\ &= 27(\sec^2(\theta))^{3/2} \\ &= 27\sec^3(\theta)\end{aligned}$$

Bây giờ, ta sẽ thay thế:

$$dx = 3\sec^2(\theta)\, d\theta$$

và,

$$(x^2+9)^{3/2} = 27\sec^3(\theta)$$

vào tích phân ban đầu, ta được:

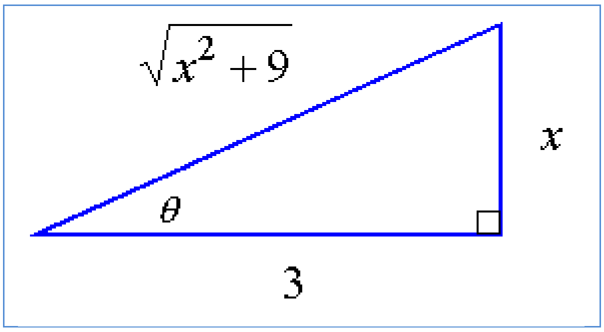
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \frac{3\sec^2(\theta)}{27\sec^3(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\sec(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{9}\int \cos(\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{9}\sin(\theta) + K\end{aligned}$$

Bây giờ ta phải chuyển đáp án của ta về x (vì tích phân cho ở đề bài theo x).

Vì ta đặt $x = 3\tan(\theta)$, ta được:

$$\tan(\theta) = \frac{x}{3}$$

và ta có thể vẽ hình để tìm giá trị của $\sin(\theta)$:



Dựa vào hình vẽ, ta lưu ý rằng,

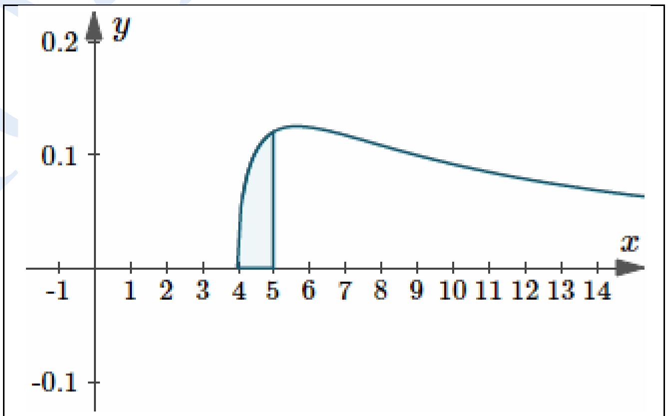
$$\sin(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

Vì vậy, ta có thể kết luận rằng đáp án cho tích phân là $\frac{1}{9}$ nhân với biểu thức cuối cùng này.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+9)^{3/2}}dx &= \frac{1}{9}\sin(\theta) + K\\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right) + K\\ &= \frac{x}{9\sqrt{x^2+9}} + K\end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính tích phân:

$$\int_4^5 \frac{\sqrt{x^2+16}}{x^2}dx$$



Đường cong $y = \frac{\sqrt{x^2+16}}{x^2}$ với phần diện tích dưới đường cong giữa $x = 4$ và $x = 5$ được làm mờ

Trả lời ví dụ 2

$$\int_4^5 \frac{\sqrt{x^2+16}}{x^2}\,dx$$

Đề bài có chứa căn bậc 2 với hình thức giống như cách thay thế thứ (iii) được cho ở đầu bài viết này, đó là:

+ Với $\sqrt{x^2-a^2}$, ta dùng $x = a\sec(\theta)$.

Vậy ta được $a = 4$ và ta đặt:

$$x = 4\sec(\theta)$$

và điều này dẫn đến:

$$x^2 = 16\sec^2(\theta)$$

và,

$$dx = 4\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta$$

Đơn giản hóa phần có căn bậc hai:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-16} &= \sqrt{16\sec^2(\theta)-16}\\ &= \sqrt{16(\sec^2(\theta)-1)}\\ &= \sqrt{16}\sqrt{\tan^2(\theta)}\\ &= 4\tan(\theta)\end{aligned}$$

Thay $dx = 4\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta$; $x^2 = 16\sec^2(\theta)$ và $\sqrt{x^2-16} = 4\tan(\theta)$ vào tích phân đã cho, ta được điều sau (để đơn giản, ta tính nguyên hàm trước, sau đó ta thay cận trên, cận dưới sau).

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^2}\,dx &= \int \frac{(4\tan(\theta))}{16\sec^2(\theta)}(4\sec(\theta)\tan(\theta))\,d\theta\\ &= \int \frac{16\tan^2(\theta)\sec(\theta)}{16\sec^2(\theta)}\,d\theta\\ &= \int \frac{\tan^2(\theta)}{\sec(\theta)}\,d\theta\\ &= \int \frac{\sec^2(\theta)-1}{\sec(\theta)}\,d\theta\\ &= \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sec(\theta)} - \frac{1}{\sec(\theta)}\,d\theta\end{aligned}$$

$$= \int \sec(\theta) - \cos(\theta)\, d\theta$$

$$= (\ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| - \sin(\theta)) + K$$

Ở đề bài yêu cầu ta tính tích phân xác định, nên ta cần biểu diễn lại đáp án nguyên hàm theo biến x hoặc ta đổi cận theo θ.

Đổi sang x:

Vừa rồi, ta đã đặt $x = 4\sec(\theta)$, nên ta được $\sec(\theta) = \frac{x}{4}$.

Sử dụng tam giác như ta đã làm ở ví dụ trước, ta có kết quả:

$$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x}$$

và,

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{4}$$

Vì vậy, ta có thể kết luận rằng:

$$\int_4^5 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} dx = |\ln(|\sec(\theta) + \tan(\theta)|) - \sin(\theta)|\Big|_{\theta=?}^{\theta=?}$$

$$= \left(\ln\left(\left|\frac{x}{4} + \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{4}\right|\right) - \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x}\right)\Bigg|_4^5$$

$$= 0.093\ 15$$

Sử dụng θ:

Vì $\sec(\theta) = \frac{x}{4}$ nên khi x đi từ 4 đến 5, khi đó $\sec(\theta)$ sẽ đi từ 1 đến 1.25.

Vậy ta cần phải có một cận mới cho θ (ở đáp án trên có dấu? cho giá trị của θ), đó là:

$$\theta = \text{arcsec}(1) = 0$$

và,

$$\theta = \text{arcsec}(1.25) = 0.643\ 501\ 1$$

Quay trở lại câu trả lời của chúng ta theo θ, thay giá trị cận trên và dưới, ta được:

$$|\ln(|\sec(\theta) + \tan(\theta)|) - \sin(\theta)|\Big|_{\theta=0}^{\theta=0.643\ 501\ 1}$$

$$= 0.09315$$

Ở ví dụ này, cả 2 hướng tiếp cận (giữ lại θ hoặc trả về biến x) để cho ra cùng một đáp án.

BÀI TẬP: Tính tích phân:

1)

$$\int \sqrt{16 - x^2}\, dx$$

Trả lời 1)

Câu hỏi này có dạng đặt ẩn lượng giác kiểu (i), tức với dạng $\sqrt{a^2 - x^2}$, ta đặt $x = a\sin\theta$.

Vậy ta có $a = 4, x = 4\sin\theta$ và $dx = 4\cos\theta\, d\theta$

Thay vào và đơn giản phần có căn bậc hai trước:

$$\begin{aligned}\sqrt{16 - x^2} &= \sqrt{16 - 16\sin^2\theta}\\ &= \sqrt{16(1 - \sin^2\theta)}\\ &= 4\sqrt{\cos^2\theta}\\ &= 4\cos\theta\end{aligned}$$

Thay vào tích phân, ta được:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{16 - x^2}\, dx &= \int 4\cos\theta\,(4\cos\theta\, d\theta)\\ &= \int 16\cos^2\theta\, d\theta\\ &= 16\int \frac{1}{2}(\cos(2\theta) + 1)\, d\theta\\ &= 8\left(\frac{1}{2}\sin(2\theta) + \theta\right) + K\\ &= 8(\sin\theta\cos\theta + \theta) + K\\ &= 8\left(\frac{x}{4}\frac{\sqrt{16 - x^2}}{4} + \arcsin\left(\frac{x}{4}\right)\right) + K\\ &= \frac{x\sqrt{16 - x^2}}{2} + 8\arcsin\left(\frac{x}{4}\right) + K\end{aligned}$$

Ta có được bước áp chót bằng cách vẽ tam giác như trong ví dụ trước.

Thông thường ta sẽ có nhiều dạng cho cùng một đáp án, tức phần mềm toán học (hay một người khác) có thể đưa ra đáp án về cơ bản chính xác nhưng khác với đáp án ở trên.

2)

$$\int \frac{3}{x\sqrt{4-x^2}}dx$$

Trả lời 2)

$$\int \frac{3}{x\sqrt{4-x^2}}dx$$

Tích phân này chứa biểu thức dạng $\sqrt{a^2-x^2}$ nên ta sẽ dung phép đặt ẩn $x = a\sin\theta$

Vậy $a = 2$ và ta đặt $x = 2\sin\theta$, khi đó $dx = 2\cos\theta\, d\theta$

Thay vào và đơn giản phần căn bậc hai, thu được:

$$\begin{aligned}\sqrt{4-x^2} &= \sqrt{4-4\sin^2\theta}\\ &= \sqrt{4(1-\sin^2\theta)}\\ &= 2\sqrt{\cos^2\theta}\\ &= 2\cos\theta\end{aligned}$$

Thay tất cả vào tích phân, ta được:

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x\sqrt{4-x^2}}dx &= \int \frac{3(2\cos\theta\, d\theta)}{(2\sin\theta)(2\cos\theta)}\\ &= \frac{3}{2}\int \frac{d\theta}{\sin\theta}\\ &= \frac{3}{2}\int \csc\theta\, d\theta\\ &= \frac{3}{2}\ln|\csc\theta - \cot\theta| + K\\ &= \frac{3}{2}\ln\left|\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + K\\ &= \frac{3}{2}\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + K\end{aligned}$$

3)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$$

Trả lời 3)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$$

Đầu tiên, ta lưu ý rằng $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$

Nếu ta đặt $u = x + 1$, khi đó $du = dx$ và tích phân trở thành:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}$$

Bây giờ, ta dung $u = \sec\theta$ và vì vậy $du = \sec\theta \tan\theta \, d\theta$

Biểu thức căn bậc hai trở thành:

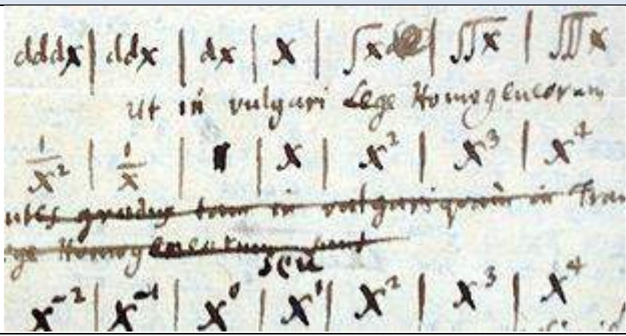
$$\sqrt{u^2 - 1} = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{\tan^2\theta} = \tan\theta$$

Quay lại tích phân, ta được:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x}} &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} \\
&= \int \frac{\sec\theta \tan\theta \, d\theta}{\tan\theta} \\
&= \int \sec\theta \, d\theta \\
&= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + K \\
&= \ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}\right| + K
\end{aligned}$$

BÀI 3.3.10 BẢNG MỘT SỐ TÍCH PHÂN THƯỜNG GẶP

BẢNG ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN CỦA LEIBNIZ



Một bảng đạo hàm và tích phân đơn giản của Gottfried Leibniz. Leibniz phát triển phép tính tích phân cùng lúc với Isaac Newton

Bài này sẽ trình bày một số công thức tính tích phân thường gặp, ta sẽ sử dụng chúng trong bài sau.

1. $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln(|ax+b|) + K$
2. $\int \frac{1}{(ax+b)^2}\,dx = -\frac{1}{a(ax+b)} + K$
3. $\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx = -\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + K$
4. $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + K = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + K$
5. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(|f(x)|) + K$
6. $\int \sin^2(u)\,du = \frac{u}{2} - \frac{1}{2}\sin(u)\cos(u) + K$
7. $\int \sin^3(u)\,du = -\cos(u) + \frac{1}{3}\cos^3(u) + K$
8. $\int \sin^n(u)\,du = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}(u)\cos(u) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(u)\,du$
9. $\int \cos^2(u)\,du = \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\sin(u)\cos(u) + K$
10. $\int \cos^3(u)\,du = \sin(u) - \frac{1}{3}\sin^3(u) + K$
11. $\int \cos^n(u)\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1}(u)\sin(u) + \frac{n+1}{n}\int \cos^{n-2}(u)\,du$
12. $\int \tan^n(u)\,du = \frac{\tan^{n-1}(u)}{n-1} + \int \tan^{n-2}(u)\,du$
13. $\int \frac{1}{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2a}\ln\left(\left|\frac{u-a}{u+a}\right|\right) + K$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} du = \ln\left(\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right) + K$

15. $\displaystyle\int t\sin(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}(\sin(nt) - nt\cos(nt)) + K$

16. $\displaystyle\int t\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}(\cos(nt) + nt\sin(nt)) + K$

17. $\displaystyle\int e^{au}\sin(bu)\,du = \frac{e^{au}(a\sin(bu) - b\cos(bu))}{a^2 + b^2} + K$

18. $\displaystyle\int e^{au}\cos(bu)\,du = \frac{e^{au}(a\cos(bu) + b\sin(bu))}{a^2 + b^2} + K$

19. $\displaystyle\int u^{au}\,du = e^{au}\frac{a^2u^2 - 2au + 2}{a^3} + K$

20. $\displaystyle\int t^2\sin(nt)\,dt = \frac{1}{n^3}(-n^2t^2\cos(nt) + 2\cos(nt) + 2nt\sin(nt)) + K$

21. $\displaystyle\int t^2\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^3}(n^2t^2\sin(nt) - 2\sin(nt) + 2nt\cos(nt)) + K$

BÀI 3.3.11 TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG CÁCH DÙNG BẢNG

Dựa vào "*Bảng một số tích phân thường gặp*" đã trình bày trong bài trên, ta có thể giải quyết nhiều tích phân một cách dễ dàng (đương nhiên là bạn có thể sử dụng các phần mềm tính toán nếu bạn muốn).

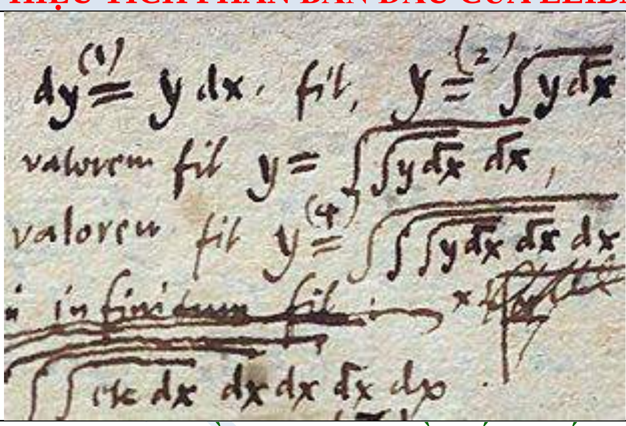
Lưu ý:

Cần nắm rõ cách đặt u và du (vì đây là chìa khóa chính để giải nhiều tích phân).

Hãy chắc chắn là bạn áp dụng đúng công thức vì một số tích phân nhìn khá giống nhau.

Dù bạn có được phép sử dụng "*Bảng một số tích phân thường gặp*" khi kiểm tra, bạn hãy cố gắng học được nhiều nhất có thể, nhất là điều kiện áp dụng. Rất nhiều học sinh cố gắng tìm kiếm công thức phù hợp ở trong bảng nhưng lại không biết thực chất mình đang làm gì.

KÝ HIỆU TÍCH PHÂN BAN ĐẦU CỦA LEIBNIZ



Ký hiệu tích phân ban đầu do Leibniz đề xuất có dấu gạch trên, giống như dấu căn bậc hai mà ta dùng ngày nay

Ví dụ về cách sử dụng bảng

Tính tích phân sau bằng cách sử dụng bảng:

$$\int e^{2x}\sin(3x)\,dx$$

Trả lời ví dụ

Ta nhận thấy công thức sau phù hợp để tính:

$$\int e^{au}\sin(bu)\,du = \frac{e^{au}(a\sin(bu) - b\cos(bu))}{a^2+b^2} + K$$

Trong ví dù này, ta dùng:

$+\ a = 2.$

$+\ b = 3.$

$+ u = x.$

Vậy:

$$\int e^{2x} \sin(3x)\, dx$$
$$= \frac{e^{2x}(2\sin(3x) - 3\cos(3x))}{2^2 + 3^2} + K$$
$$= \frac{e^{2x}(2\sin(3x) - 3\cos(3x))}{13} + K$$

BÀI 3.3.12 TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG CÔNG THỨC ĐỆ QUY

Trong "*Bảng một số tích phân thường gặp*", bạn có thể nhận thấy rằng một số công thức tính tích phân lại cho ra một tích phân khác đơn giản hơn. Việc này đòi hỏi ta cần phải làm vài bước để đưa ra câu trả lời cuối cùng.

Công thức đệ quy (reduction formulae) là tích phân bao gồm một số biến n, cũng như biến thường gặp x. Ta thường gặp chúng khi tính tích phân từng phần.

Ta dùng ký hiệu I_n khi sử dụng công thức đệ quy.

Ví dụ 1: Cho công thức đệ quy sau:`

$$I_n = \int \sin^n(x)\,dx = -\frac{1}{n}\cos(x)\sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Tìm:

$$\int \sin^4(x)\,dx$$

Trả lời ví dụ 1

Áp dụng công thức đệ quy cho $n = 4$, ta được:

$$\int \sin^4(x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(x)\sin^3(x) + \frac{3}{4} I_2$$

Bây giờ ta cần tìm $I_2 = \int \sin^2(x)\,dx$, thỏa yêu cầu $n = 2$.

Bây giờ, dựa vào "*Bảng một số tích phân thường gặp*".

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + K$$

Đặt các giá trị này lại với nhau, ta được:

$$\int \sin^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\cos(x)\sin^3(x) + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + K\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\cos(x)\sin^3(x) + \frac{3}{8}x - \frac{8}{3}\sin(x)\cos(x) + K'$$

Lưu ý: Ta dùng K và K' vì giá trị của hai hằng số này là khác nhau.

Ví dụ 2: Ta biết rằng nếu:

$$I_n = \int \tan^n(x)\,dx$$

thì:

$$I_n = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}(x) - I_{n-2}$$

Tìm kết quả tích phân:

$$\int \tan^3(x)\, dx$$

Trả lời ví dụ 2

$$\int \tan^3(x)\, dx = \frac{1}{2}\tan^2(x) - I_1$$

Bây giờ,

$$I_1 = \int \tan(x)\, dx = -\ln(|\cos(x)|) + K$$

Vậy,

$$\int \tan^3(x)\, dx = \frac{1}{2}\tan^2(x) + \ln(|\cos(x)|) + K$$

Lưu ý: Có nhiều cách để giải quyết bài này và ta có thể có được nhiều đáp án đúng nhưng lại khác nhau. Nếu bạn sử dụng các phần mềm toán học như Scientific Notebook, bạn có thể nhận được đáp án:

$$\int \tan^3(x)\, dx = \frac{1}{2}\tan^2(x) - \frac{1}{2}\ln(|1 + \tan^2(x)|) + K$$

Hai đáp án này có giống nhau không?

BÀI 3.3.13 TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHÂN SỐ RIÊNG PHẦN

Nếu hàm lấy tích phân (biểu thức sau dấu tích phân) có dạng là một phân số đại số (algebraic fraction) và ta không thể lấy tích phân bằng các công thức đơn giản, phân thức đó cần được biểu diễn lại thành những phân số riêng phần (partial fraction) trước khi lấy tích phân.

Các bước cần thiết để phân tích một phân số đại số sang các phân số riêng phần đó là ta xem phân số đó là tổng (hoặc hiệu) của các phân số nào.

Để hiểu rõ hơn, ta quan sát cách cộng 2 phân số đại số sau:

$$\frac{1}{x+2}+\frac{5}{x+3}$$

$$=\frac{(x+3)+5(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{6x+13}{x^2+5x+6}$$

Trong bài này, ta sẽ thực hiện ngược quy trình trên. Có nghĩa là nếu ta có phân số:

$$\frac{6x+13}{x^2+5x+6}$$

và ta muốn tìm xem tổng của những phân số nào cho ra phân thức trên, khi đó hai phân số mà ta thu được là $\frac{1}{x+2}$ và $\frac{5}{x+3}$ được gọi là các phân số riêng phần của $\frac{6x+13}{x^2+5x+6}$.

Ta phân tích một phân số ra thành các phân số riêng phần như trên vì:

+ Điều này khiến việc tính tích phân trở nên đơn giản hơn.

+ Được sử dụng nhiều trong chuyển đổi Laplace.

Vậy nếu ta cần tính tích phân phân số này, ta có thể đơn giản hóa theo cách sau:

$$\int\frac{6x+13}{x^2+5x+6}dx$$

$$=\int\frac{1}{x+2}dx+\int\frac{5}{x+3}dx$$

$$=\ln(x+2)+5\ln(x+3)+K$$

$$=\ln\left((x+2)(x+3)^5\right)+K$$

Bây giờ ta sẽ quan sát xem cách thức để chuyển một phân số về các phân số riêng phần.

I. QUY TẮC 1

Trước khi ta biểu diễn trực tiếp một phân số sang các phân số riêng phần, giá trị lũy thừa cao nhất của tử số phải ít hơn giá trị lũy thừa cao nhất của mẫu số tối thiểu 1 đơn vị.

Ví dụ 1

Phân số:

$$\frac{2x^2+3}{x^3-1}$$

có thể biểu diễn thành các phân số riêng phần, trong khi phân số:

$$\frac{2x^3+3}{x^3-1}$$

không thể biểu diễn trực tiếp thành các phân số riêng phần.

Tuy nhiên, bằng cách chia:

$$\frac{2x^3+3}{x^3-1} = 2 + \frac{5}{x^3-1}$$

và phân số trong kết quả có thể biểu diễn thành các phân số riêng phần.

(Lưu ý: Mẫu số của phân số ta phải đưa về dạng nhân tử trước khi biểu diễn).

II. QUY TẮC 2: MẪU SỐ CÓ NHÂN TỬ TUYẾN TÍNH

Với mỗi toán tử tuyến tính $ax + b$ ở mẫu trong một hàm phân thức hữu tỉ, ta được một phân số riêng phần có dạng:

$$\frac{A}{ax+b}$$

với A là hằng số.

Ví dụ 2: Biểu diễn phân số sau dưới dạng các phân số riêng phần.

$$\frac{3x}{(2x+1)(x+4)}$$

Trả lời ví dụ 2

Ta đặt:

$$\frac{3x}{(2x+1)(x+4)} \equiv \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+4}$$

Ta tìm giá trị của A và B bằng cách nhân hai vế cho $(2x+1)(x+4)$.

$$3x = A(x+4) + B(2x+1)$$

Sau đó ta phá ngoặc, gom lại theo từng nhóm như sau:

$$3x = (A+2B)x + (4A+B)$$

Tiếp theo, ta cho hệ số trước mỗi x và hằng số ở cả 2 vế bằng nhau:

Đối với phần x: ta được $3 = A + 2B$.

Đối với hằng số: ta được $0 = 4A + B$.

Giải hệ phương trình, ta được:

$$\begin{cases} A + 2B = 3 \\ 4A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{3}{7} \\ B = \dfrac{12}{7} \end{cases}$$

Vậy,

$$\frac{3x}{(2x+1)(x+4)} = \frac{-3}{7(2x+1)} + \frac{12}{7(x+4)}$$

III. QUY TẮC 3: MẪU SỐ CÓ NHIỀU NHÂN TỬ TUYẾN TÍNH ĐƯỢC LẶP

Nếu một nhân tử tuyến tính được lặp n lần ở mẫu, khi đó sẽ có n phân số riêng phần tương ứng với số mũ từ 1 đến n.

Ví dụ, phân số riêng phần của:

$$\frac{5x^3 + 7x - 9}{(x+1)^4}$$

sẽ có dạng:

$$\frac{5x^3 + 7x - 9}{(x+1)^4} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{(x+1)^4}$$

(Dấu "≡" mang ý nghĩa "đồng nhất", ta thường sử dụng dấu này giữa hai biểu thức mà ta mong muốn rằng chúng bằng nhau. Ta có thể dùng dấu "=" nếu muốn.).

Ví dụ 3:

(a) Biểu diễn biểu thức sau thành tổng các phân số riêng phần:

$$\frac{x+5}{(x+3)^2}$$

Trả lời ví dụ 3, câu (a)

$$\frac{x+5}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2}$$

Nhân hai vế cho $(x+3)^2$:

$$x + 5 = A(x+3) + B$$

Đồng nhất hệ số của x và của hằng số, ta được hệ phương trình.

$$\begin{cases} A = 1 \\ 3A + B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$$

Vậy,

$$\frac{x+5}{(x+3)^2} = \frac{1}{x+3} + \frac{2}{(x+3)^2}$$

Đừng vội tin đây là đáp án đúng. Hãy cộng lại các phân số ở vế phải và bạn sẽ tự tin hơn về tính đúng đắn của cách làm này. Bằng cách kiểm chứng, bạn sẽ học được rất nhiều về nguyên lý cách thức này hoạt động. Sẽ rất tốt nếu như bạn luôn thường xuyên kiểm tra công việc mình đang làm.

(b) Biểu diễn biểu thức sau thành tổng các phân số riêng phần:

$$\frac{2x^2 - 3}{(x-1)^3(x+1)}$$

Trả lời ví dụ 3, câu (b)

$$\frac{2x^2 - 3}{(x-1)^3(x+1)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+1}$$

Ta nhân 2 vế cho $(x-1)^3(x+1)$:

$$2x^2 - 3 = A(x-1)^2(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x+1) + D(x-1)^3$$

Ta không cần phải phá hết ngoặc ra, ta chỉ việc thay các giá trị x phù hợp để tìm kết quả của A; B; C; D.

Với $x = 1$:

+ Vế trái $= -1$.

+ Vế phải $= 2C$.

+ Vậy $C = -\frac{1}{2}$.

Với $x = -1$:

+ Vế trái $= -1$.

+ Vế phải $= -8D$.

+ Vậy $D = \frac{1}{8}$.

Bây giờ ta sẽ so sánh hệ số của x^3 ở cả hai vế và sau đó ta so sánh hằng số ở cả hai vế.

Hệ số của x^3 ở vế trái $= 0$.

Hệ số của x^3 ở vế phải $= A + D$.

Vậy $A = -D$.

Do $D = \frac{1}{8}$ nên $A = -\frac{1}{8}$.

Hằng số ở vế trái $= -3$.

Hằng số ở vế phải $= A - B + C - D$.

Nhưng ta đã biết được 3 giá trị nên ta dễ dàng tìm được $B = \frac{9}{4}$.

Vậy,

$$\frac{2x^2 - 3}{(x-1)^3(x+1)} = -\frac{1}{8(x-1)} + \frac{9}{4(x-1)^2} - \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{1}{8(x+1)}$$

IV. QUY TẮC 4: MẪU CHỨA NHÂN TỬ BẬC 2

Ứng với mỗi nhân tử bậc hai $ax^2 + bx + c$, ta sẽ được phân số riêng phần có sạng.

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + x}$$

Ví dụ 4: Biểu diễn biểu thức sau thành các phân số riêng phần.

$$\frac{x^3 - 2}{x^4 - 1}$$

Trả lời ví dụ 4

Đầu tiên, ta cần đặt nhân tử cho mẫu:

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

Vậy,

$$\frac{x^3 - 2}{x^4 - 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{x - 1}$$

Ta nhân hai vế cho $(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$:

$$x^3 - 2 \equiv (Ax + B)(x + 1)(x - 1) + C(x^2 + 1)(x - 1) + D(x^2 + 1)(x + 1)$$

Với $x = 1$:

+ Vế trái $= -1$.

+ Vế phải $= 4D$.

+ Vậy $D = -\frac{1}{4}$.

Với $x = -1$:

+ Vế trái $= -3$.

+ Vế phải $= -4C$.

+ Vậy $C = \frac{3}{4}$.

Hệ số của x^3 ở vế trái $= 1$.

Hệ số của x^3 ở vế phải $= A + C + D$.

Vì $D = -\frac{1}{4}$ và $C = \frac{3}{4}$ nên $A = \frac{1}{2}$.

Hằng số ở vế trái $= -2$.

Hằng số ở vế phải $= -B - C + D$.

Điều này cho ta $B = 1$.

Vậy,

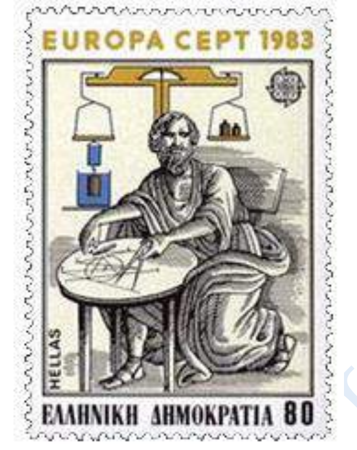
$$\frac{x^3 - 2}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} = \frac{\frac{1}{2}x + 1}{x^2+1} + \frac{3}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)}$$
$$= \frac{x+2}{2(x^2+1)} + \frac{3}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)}$$

Lưu ý: Phân số có nhân tử bậc 2 được lặp ở mẫu, phân số riêng phân có dạng gần giống với nhân tử tuyến tính được lặp.

CHƯƠNG 4: BÀI ĐỌC THÊM

BÀI 4.1 ARCHIMEDES VÀ DIỆN TÍCH MỘT PHẦN HÌNH PARABOLA

Archimedes là một nhà Toán học vào thời Hi Lạp cổ đại, sống cách đây 2300 năm về trước.



Archimedes

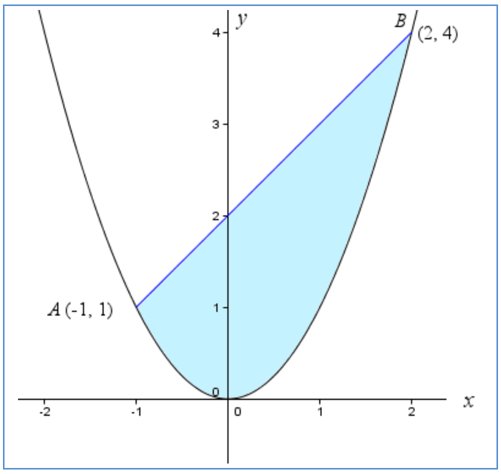
Nhiều phát minh cũng như những khám phá Toán học của ông được đánh giá là đi trước thời đại. Thật là hay khi bạn có thể phát huy được sự sáng tạo trong khi xung quanh bạn đang có rất nhiều kẻ thù có thể tấn công bạn bất kỳ lúc nào.

Việc xác định diện tích dưới đường cong là một vấn đề nan giải trong nhiều năm. Những buổi hội chợ, thương mại, người ta phải làm việc nhiều với thể tích của khối hình trụ và hình cầu, Archimedes đã cho ra kết quả xấp xỉ tốt cho diện tích hình tròn cũng như giá trị xấp xỉ số π.

Bài viết này sẽ trình bày điểm đáng chú ý nhất trong tất cả các ý tưởng của Archimedes, đây là công trình xuất hiện trước cả thời Isaac Newton và Gottfried Leibniz (những nhà toán học đã phát triển phép tính vi phân vào khoảng thế kỷ 17) khoảng 2000 năm.

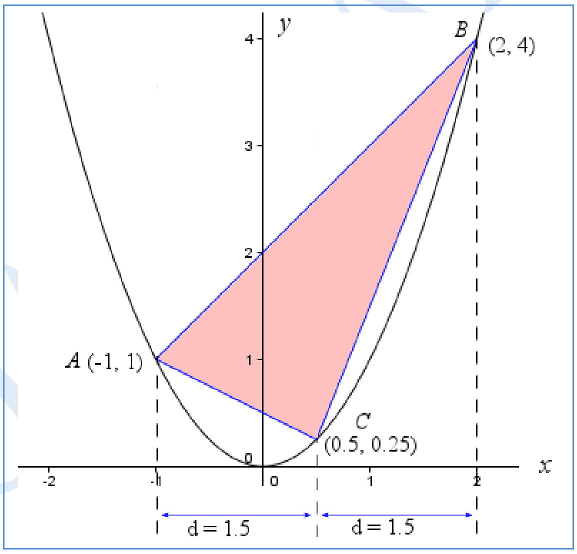
I. DIỆN TÍCH MỘT PHẦN HÌNH PARABOLA

"Một phần parabola" đó là vùng hình phẳng bao bởi parabola và đường thẳng, ví dụ như vùng màu xanh sáng ở hình dưới đây.



Tôi dùng hình parabola đơn giản $y = x^2$ và 2 điểm mốc của đoạn thẳng là $A(-1; 1)$ và $B(2; 4)$. Định lý của Archimedes áp dụng được với bất kỳ đường parabola vào bất kỳ đường thẳng nào cắt ngang đường parabola đó. (Đương nhiên, Archimedes không dùng hệ trục tọa độ Oxy vì thời của ông chưa ai phát minh ra trục này, mãi đến thế kỷ 17 thì Descartes mới phát minh ra).

Archimedes sau đó đặt điểm C sao cho hoành độ x của điểm này bằng một nửa khoảng cách của hoành độ x của A đến hoành độ x của B. Sau đó ông ta xây dựng tam giác ABC như sau:



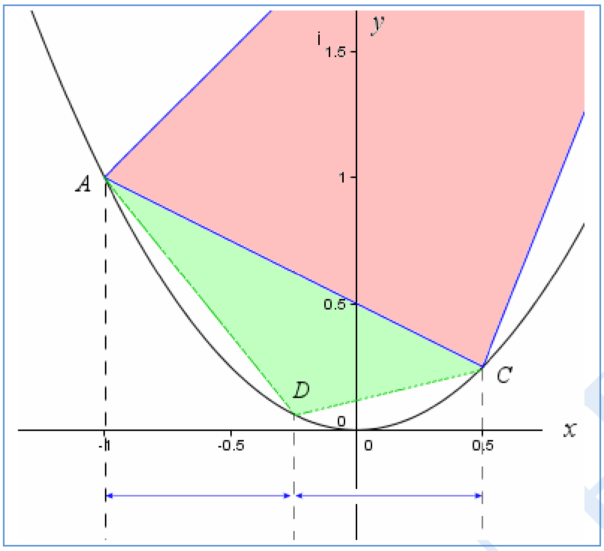
Ở ví dụ này, giá trị hoành độ x của C là 0.5, cách mỗi điểm $x = -1$ và $x = 2$ là 1.5 đơn vị.

Archimedes đã chứng minh được rằng diện tích một phần parabola (vùng có màu xanh sáng) bằng $\frac{4}{3}$ diện tích tam giác ABC.

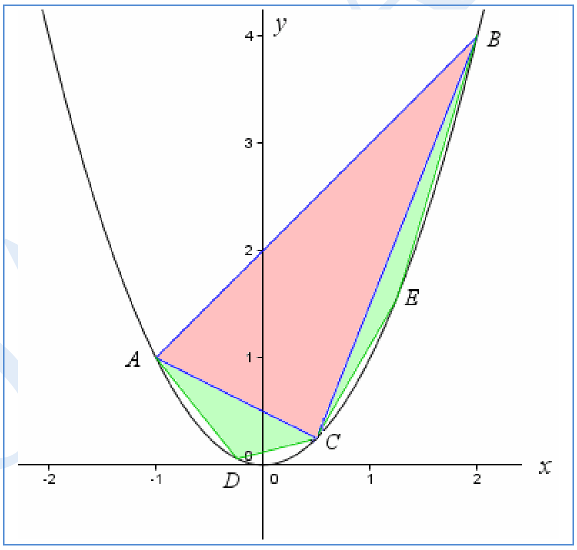
Ông đã dùng "Phương pháp vét cạn (method of Exhaustion)" để cho ra kết quả này. Ý tưởng phương pháp này đó là tìm diện tích hình cong bằng cách vẽ các hình ngũ giác nhỏ dần liên tiếp nhau, nội tiếp trong hình cong cho đến khi nào lấp đầy hình cong. Ta có thể tính được diện tích hình ngũ giác, từ đó suy ra được diện tích hình cong.

Bây giờ ta xây dựng một tam giác khác bằng cách chọn một điểm D trên parabola sao cho giá trị x của điểm này bằng một nửa khoảng cách giá trị x của A và C, giống như ta đã làm.

Hãy phóng to và xem kết quả:

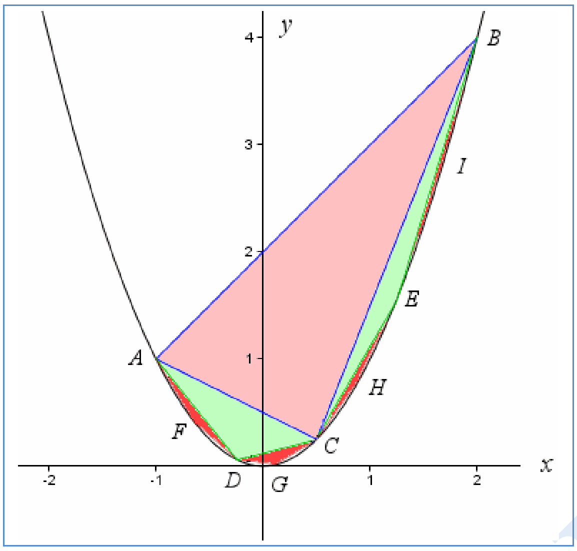


Ta tiếp tục quy trình trên trên đoạn BC, tức đặt điểm E sao cho giá trị x của E bằng một nửa khoảng cách giữa C và D.



Ta có thể thấy rằng nếu ta cộng diện tích của các tam giác ABC, ACD và BCE với nhau, ta sẽ được giá trị xấp xỉ hợp ý cho diện tích một phần hình parabola, nhưng ta có thể có được kết quả xấp xỉ tốt hơn nữa.

Nếu ta tiếp tục quy trình này, ta sẽ tạo dựng thêm 4 tam giác nữa như hình dưới đây.



Bạn sẽ thấy một phần hình parabola sẽ còn lại một số “vùng trắng nhỏ” và nếu ta cộng diện tích của 7 tam giác này, ta sẽ thu được giá trị xấp xỉ còn tốt hơn cho diện tích một phần hình parabola.

Nếu ta cộng diện tích một lượng vô hạn các hình tam giác, ta sẽ được giá trị chính xác cho diện tích một phần hình parabola.

Bây giờ, diện tích của mỗi hình tam giác màu xanh lá sáng bằng $\frac{1}{8}$ diện tích hình tam giác màu hồng, bởi vì tam giác màu xanh lá có độ rộng bằng $\frac{1}{2}$ độ rộng tam giác màu hồng (vì ta đã xây dựng chúng như vậy) và có chiều cao bằng $\frac{1}{4}$ chiều cao tam giác màu hồng (ta có thể dùng phương trình tham số để chứng minh điều này.).

Sau đó, ta mô tả các tam giác màu đỏ, chúng sẽ có diện tích bằng $\frac{1}{8}$ diện tích của tam giác màu xanh lá sáng.

Vậy, nếu ta giả sử diện tích của tam giác màu hồng lớn là X, thì tổng diện tích của tất cả các hình tam giác sẽ là:

$$X + 2\left(\frac{X}{8}\right) + 4\left(\frac{X}{64}\right) + 8\left(\frac{X}{512}\right) + \cdots$$
$$= X + \frac{X}{4} + \frac{X}{16} + \frac{X}{64} + \cdots$$
$$= X\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right)$$

Ta nhận thấy biểu thức ở trong ngoặc chính là một cấp số nhân có công bội là $r = \frac{1}{4}$ và phần tử đầu tiên $a = 1$. Kết quả tổng của cấp số nhân lùi vô hạn này sẽ là:

$$\text{Tổng} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

(Archimedes đã sử dụng chứng minh hình học cho tổng này nên chúng còn được gọi là chuỗi hình học).

Vậy tổng diện tích của các tam giác (kết quả này cho ta diện tích của một phần parabola màu xanh sáng) là $\frac{4X}{3}$, bằng $\frac{4}{3}$ diện tích của tam giác màu hồng, đúng như Archimedes đã đề cập.

Ý tưởng đằng sau giải pháp này rất tương đồng với ý tưởng phát triển vi tích phân.

II. SỬ DỤNG TÍCH PHÂN

Ta sẽ dùng tích phân để kiểm chứng đáp án mà Archimedes đề ra.

Ở vì dụ này, với $y = x^2$ và đường $y = x + 2$ cắt ngang parabola tại điểm $(-1; 1)$ và $(2; 4)$, tam giác hồng có cạnh $AC = 1.68$ đơn vị và chiều cao là 4.02 đơn vị, nên diện tích tam giác này là:

$$\text{Diện tích: } \Delta ABC = 0.5 \cdot 1.68 \cdot 4.02 = 3.38 \text{ đơn vị}^2$$

Vậy, liện hệ đến Archimedes, diện tích của một phần parabola (xanh sáng) sẽ là:

$$\text{Diện tích một phần parabola} = \frac{4}{3} \cdot 3.38 = 4.5 \text{ đơn vị}^2$$

Bây giờ, ta hãy so sáng đáp án này với đáp án dùng tích phân. Diện tích cần tính chính là diện tích hình phẳng giữa 2 đường cong. Đường cong trên là đường $y_2 = x + 2$ và đường cong dưới là $y_1 = x^2$. Cận của tích phân là $x = -1$ và $x = 2$.

$$\begin{aligned}\int_a^b y_2 - y_1\, dx &= \int_{-1}^{2} (x+2) - x^2\, dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} \\ &= 4.5\end{aligned}$$

Vậy ta có cùng đáp án là 4.5 đơn vị^2.

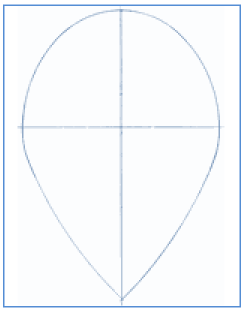
Như tôi nói ban đầu, cách làm của Archimedes để tính diện tích một phần hình parabola là thành quả rất xuất sắc. Trước thời của Newton và Leibniz thiết lập nên vi tích phân đến 2000 năm, Archimedes đã nắm được ý tưởng cơ bản rất tốt.

Thật thú vị (và nguy hiểm) khi ý tưởng này bị "lãng quên" đến cả ngàn năm.

Bạn đọc có thể xem bản tiếng Anh công trình "*Phép cầu phương parabola của Archimedes*" tại địa chỉ http://www.math.ubc.ca/~cass/archimedes/parabola.html.

BÀI 4.2 THỂ TÍCH MẶT DÂY CHUYỀN

Trong không gian ba chiều, giả sử ta có mặt dây chuyền có thiết diện như hình dưới đây, ta sẽ tính thể tích mặt dây chuyền đó như thế nào?



Để làm bài này, bạn đọc hãy xem qua bài "*Thể tích khối tròn xoay*" để nắm được ý tưởng khi tính thế tích bằng tích phân.

Ý tưởng cơ bản đó là ta lấy một hình phẳng cho trước và xoay quanh trục y. Đây cũng chính là ý tưởng của việc gia công mặt dây chuyền trong thực tế, đó là bỏ một khối vật liệu vào máy tiện và xoay, mài nó, cắt tỉa cạnh cho đến khi ta được mẫu 3 chiều hoàn chỉnh.

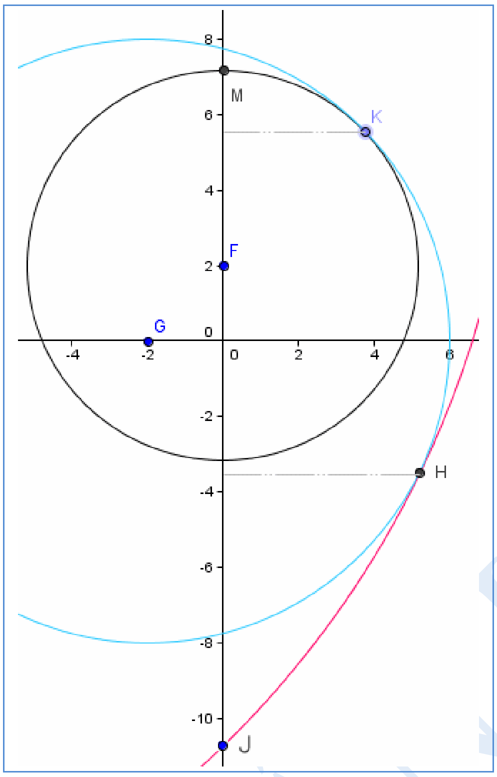
Xét về mặt toán học, ta sẽ cắt vật thể 3 chiều này theo chiều ngang (vô hạn lần) thành khối hình trụ siêu mỏng, sau đó ta cộng thể tích các khối mỏng này lại, ta sẽ được thể tích của mặt dây chuyền. Để làm điều này, ta cần biết được hàm số cho mỗi phần của mặt dây chuyền và lấy tích phân.

Dưới đây là sơ đồ thiết diện mặt dây chuyền. Thiết hiện này tạo bởi 3 hình tròn như sau:

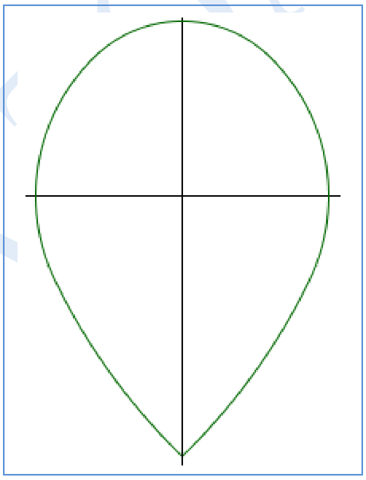
+ Ở phần trên, M đến K, là một cung của hình tròn màu đen tâm $F(0;2)$ và có bán kính là $5.17\ cm$.

+ Ở phần giữa, K đến H, là cung của hình tròn màu xanh sáng tâm $G(-2;0)$ và có bán kính là $8\ cm$.

+ Ở phần dưới, H đến J, là cung của hình tròn màu đỏ tâm $A(-18;7.75)$ (không hiển thị trên sơ đồ) và bán kính $25.78\ cm$.



Đây là kết quả cuối cùng sau khi ta hợp nhất các cung và chiếu dối xứng qua trục y.



Bây giờ ta sẽ tính thể tích.

I. XẤP XỈ THỂ TÍCH

Trong bài này, sẽ thuận lợi hơn nếu ta có kết quả ước lượng thể tích mặt dây chuyền.

Khi ta xoay hình trên quanh trục y, hình mới tạo thành sẽ gần giống với khối cầu có bán kính $6.5\ cm$. Tổng quát, thể tích khối cầu là:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Thay giá trị $r = 6.5$, ta được kết quả 1 150.3 cm^3.

II. THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY – TRỤC THẲNG ĐỨNG

Đây là công thức ta dùng:

$$\text{Thể tích} = \pi \int_c^d x^2\, dy$$

Công thức yêu cầu ta phải biểu diễn hàm số theo x (vì khi đó hàm x sẽ chỉ có ẩn y), bình phương và lấy tích phân.

Vì cạnh của mặt dây chuyền có 3 mảnh, ta cần tách tích phân ra làm 3 phần (tôi sẽ làm từ dưới lên và dùng giá trị y của điểm giao cung tròn với trục tung để tạo cận dưới và cận trên ứng với mỗi tích phân):

$$\text{Thể tích} = \pi \int_{-10.7}^{-3.49} x_1^2\, dy + \pi \int_{-3.49}^{5.55} x_2^2\, dy + \pi \int_{5.55}^{7.17} x_3^2\, dy$$

Bây giờ ta sẽ thiết lập hàm số.

Mục đích của ta sẽ tìm biểu thức cho x^2 ứng với 3 cung khác nhau.

Tổng quát, hình tròn tâm $(h; k)$ và có bán kính r có phương trình:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Tôi sẽ sử dụng trường hợp đơn giản nhất (cung ở giữa) để minh họa việc ta phải làm. Trong ví dụ này, cung ở giữa là một phần của đường tròn tâm $G(-2;\ 0)$ và có bán kính là 8. Phương trình đường tròn này là:

$$\big(x-(-2)\big)^2 + y^2 = 64$$

Với các tính chất cơ bản của đại số cho ta biểu thức của x^2 theo y.

$$x^2 = \left(\sqrt{64-y^2} - 2\right)^2$$

(Tôi chỉ lấy căn bậc 2 dương bởi vì ta chỉ cần phần bên phải của mặt dây chuyền). Tôi dùng kết quả này để biểu diễn x_2 trong tích phân.

Tương tự cho 2 cung còn lại, thay kết quả vào phương trình tính thể tích cho ta:

$$\text{Thể tích} = \pi \int_{-10.7}^{-3.49} \left(\sqrt{664.4-(y-7.75)^2} - 18\right)^2 dy + \pi \int_{-3.49}^{5.55} \left(\sqrt{64-y^2} - 2\right)^2 dy$$
$$+\, \pi \int_{5.55}^{7.17} 26.7 - (y-2)^2\, dy$$

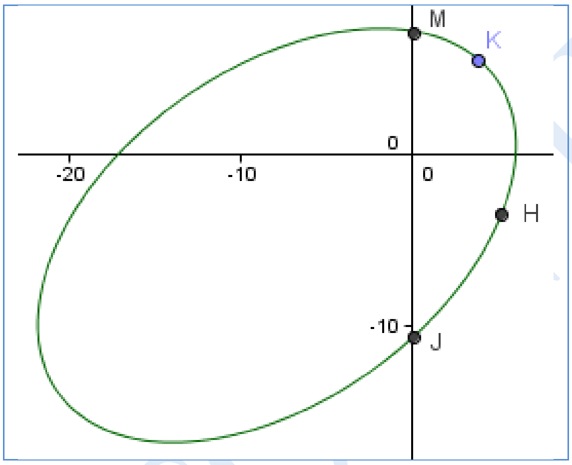
Tiếp theo, ta sẽ dùng phần mềm máy tính (tôi dùng Scientific Notebook, bạn có thể dùng Wolfram|Alpha) để tính các tích phân này và ta có kết quả thể tích là 1140.76 cm^3.

Đáp số này rất gần với kết quả dự đoán của ta là 1150 nên ta có thể tự tin sự chính xác của đáp số này.

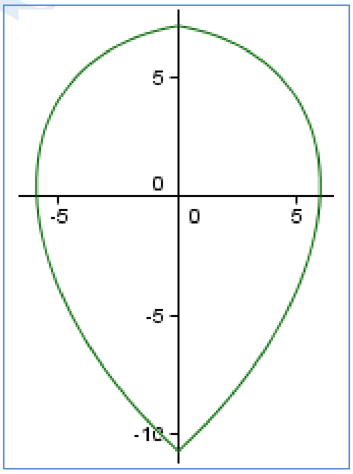
III. CÁCH GIẢI KHÁC – MÔ HÌNH HÓA ELLIPSE

Một cách khác để giải quyết bài này đó là vẽ ellipse qua những điểm đã biết và xem hình đó xấp xỉ một hình tròn. Tôi tin rằng cách làm này sẽ ngắn hơi nhưng vẫn cho ra kết quả hợp lý.

Các điểm ta đã biết là $M; H;$ K và J, nên ta có thể dùng phần mềm GeoGebra để vẽ ellipse đi qua các điểm, giống thế này.



Ta lấy phần bên phải trục y, xoay quanh trục này, khi đó ta sẽ được thiết diện giống như hình dưới đây.Bạn có thể thấy hình dưới đây tựa như hình mặt dây chuyền ban đầu. Phần đỉnh hơi nhọn, nhưng điều này không ảnh hưởng nhiều đến thể tích.



Phần mềm GeoGebra cho ta biết phương trình của ellipse:

$$-594.9x^2 + 594.7xy - 800.5y^2 - 6\,672.3x - 2\,828.1y + 61\,451 = 0$$

Ta cần biểu diễn phương trình này theo x^2, tôi sẽ dùng phần mềm Scientific Notebook để giải thay tôi, bằng cách giải phương trình tìm x, sau đó bình phương kết quả.

$$x^2 = \left(-5.61 + 0.5y + 8.4 \times 10^{-9}\sqrt{(1.91 \times 10^{18} - 1.47 \times 10^{17}y - 1.55 \times 10^{16}y^2)}\right)^2$$

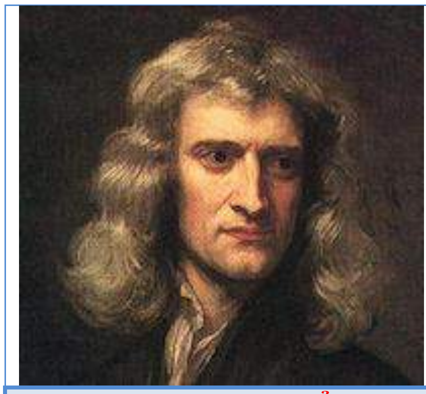
Thay biểu thức này vào công thức tính thể tích. Cận trên và dưới của tích phân là -10.7 (điểm J) và 7.17 (điểm M).

$$\text{Thể tích} = \pi \int_{-10.7}^{7.17} x^2\,dy = 1\ 164.43$$

Vậy cách sử dụng hình ellipse để mô hình hóa mặt dây chuyền cho ra kết quả khá chính xác (sai số 2%). Mặc dù nhìn phương trình có vẻ rối rắm nhưng thực ra ta không tốn nhiều công sức để làm.

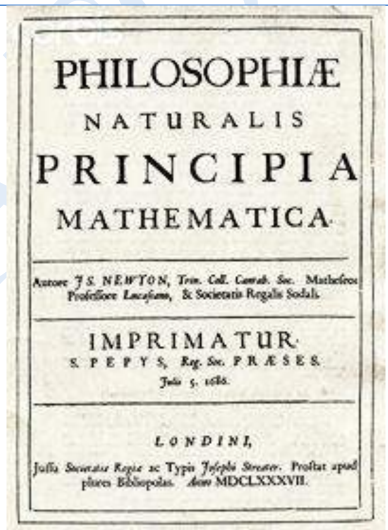
BÀI 4.3 NEWTON ĐÃ NÓI GÌ VỀ VI TÍCH PHÂN?

Hầu hết chúng ta học toán từ những giáo trình hiện đại với những ký hiệu hiện đại và chúng thường khác với ký hiệu gốc trong lịch sử. Vì vậy, không mấy ngạc nhiên khi nhiều người nghĩ rằng toán học là một phát minh hiện đại và nó được thiết kế chỉ để tra tấn học sinh!



Isaac Newton ở tuổi 46

Isaac Newton đã viết những ý tưởng của ông về vi tích phân trong cuốn "The Principia" (hoặc đầy đủ hơn "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", nghĩa là nguyên tắc toán học của triết học tự nhiên) được xuất bản lần đầu vào năm 1687 và đây là một cuốn sách tuyệt vời theo thời gian. Không chỉ vi tích phân, cuốn sách này còn bao gồm cả những quy luật chuyển động của ông.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Trang bìa cuốn The Principia

Newton viết Principia bằng tiếng Latin. Mặc dù các nhà khoa học khác đã viết cuốn sách này bằng ngôn ngữ mẹ đẻ của họ (hoặc một số ngôn ngữ phổ biến khác như tiếng Pháp, Đức và Anh), nhưng Principia rất phổ biến trong giới toán học viết bằng tiếng Latin vào thế kỷ 19,

Hãy theo dõi vào một phần nhỏ ("Bổ đề II") của công trình vủa Newton trong bản dịch bằng tiếng Anh vào năm 1729.

Vấn đề sau đây rất quan trọng với các nhà khoa học vào cuối thế kỷ 17, đó là họ gặp một số vấn đề cấp bách trong ngành khoa học hàng hải,thiên văn học và các hệ thống máy móc cơ khí mà không thể giải quyết được bằng những công cụ toán học đã có lúc bấy giờ.

Trước khi xem cuốn sách, bạn cần nắm vững một số khái niệm sau.

+ Bổ đề (lemma) là một mệnh đề đã được chứng minh, và nó dẫn đến các kết quả mở rộng hơn.

+ Trong tiếng Anh cổ, ký hiệu ∫ đại diện cho chữ "S". Từ đầu tiên xuất hiện bên dưới là "in∫crib'd", mà chúng ta viết là "inscribed" (lưu ý rằng chữ "s" được sử dụng cho danh từ số nhiều giống như chữ "s" của chúng ta hiện tại). Kéo dài chữ S, ta được ký hiệu ∫, được sử dụng để ký hiệu cho "tích phân", vì tích phân có liên quan chặt chẽ đến "tổng" (sum).

+ "Dimini ∫ hed" là "giảm" (diminished), còn có nghĩa là "trở nên nhỏ hơn".

+ is "&c" mà ngày nay chúng ta viết là "etc" (et cetera nghĩa là "vân vân").

+ "Augmented" nghĩa là "trở nên lớn hơn".

+ "Ad infinitum" trong tiếng Latin có nghĩa là "tiếp tục thực hiện cho đến khi bạn tiếp cận vô hạn".

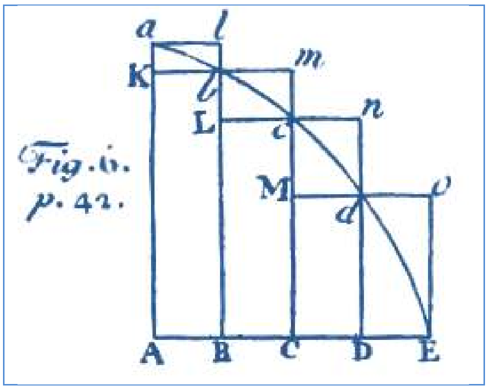
LEMMA II.

If in any figure AacE (Pl. 1. Fig. 6.) *terminated by the right lines* Aa, AE, *and the curve* acE, *there be inſcrib'd any number of parallelograms* Ab, Bc, Cd, *&c. comprehended under equal baſes* AB, BC, CD, *&c. and the ſides* Bb, Cc, Dd, *&c. parallel to one ſide* Aa *of the figure; and the parallelograms* aKbl, bLcm, cMdn, *&c. are compleated. Then if the breadth of thoſe parallelograms be ſuppos'd to be diminiſhed, and their number to be augmented* in infinitum: *I ſay that the ultimate ratio's which the inſcrib'd figure* AKbLcMdD, *the circumſcribed figure* AalbmcndoE, *and curvilinear figure* AabcdE, *will have to one another, are ratio's of equality.*

Bổ đề II

Nếu bất kỳ hình $AacE$ (như hình 6) giới hạn bởi hai đường Aa; AE vuông góc nhau và đường cong acE, khi đó tồn tại một lượng các hình bình hành Ab; Bc; Cd; ... được bao bởi các cạnh bằng nhau AB; BC; CD; ... và các cạnh Bb; Cc; Dd; ... song song với một cạnh A của hình, và hình bình hành $aKbl$; $bLcm$; $cMdn$; ... là hoàn chỉnh. Nếu ta giảm độ rộng các hình bình hành xuống và tăng số lượng hình bình hành lên đến vô hạn: ta nói rằng tỉ lệ sau cùng giữa hình nội tiếp $AKbLcMdD$, hình bao xung quanh $AalbmcndoE$ hình cong $AabcdE$ bằng nhau và chúng *trùng với nhau.*

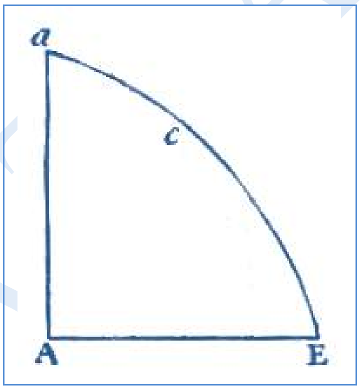
Đây là hình ảnh có trong "Bổ đề II"



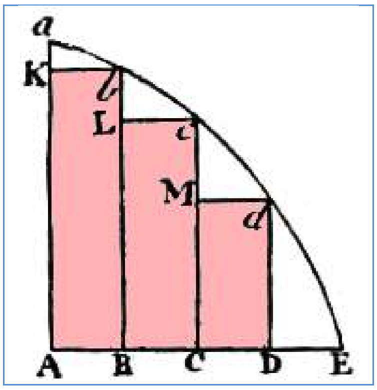
I. GIẢI THÍCH

Ta sẽ quan sát từng ý một trong bổ đề. Chúng ta muốn tìm diện tích giữa đường cong $abcdE$ và hai đường Aa và AE.

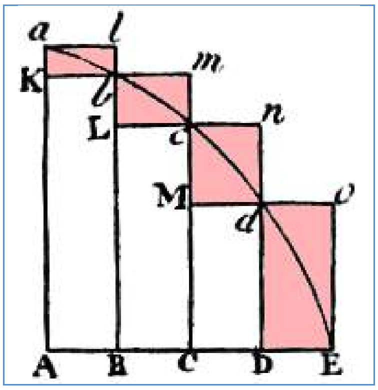
Nếu bất kỳ hình $AacE$ (như hình 6) giới hạn bởi hai đường Aa; AE vuông góc nhau và đường cong acE,



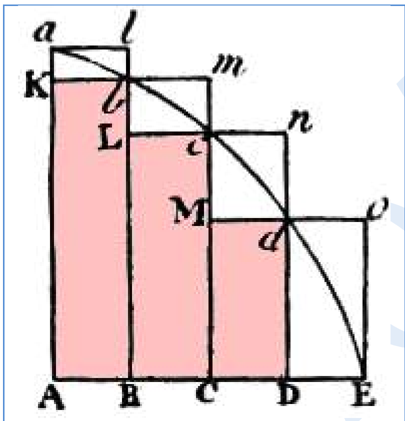
khi đó tồn tại một lượng các hình bình hành Ab; Bc; Cd; ... được bao bởi các cạnh bằng nhau AB; BC; CD; ... và các cạnh Bb; Cc; Dd; ... song song với một cạnh A của hình,



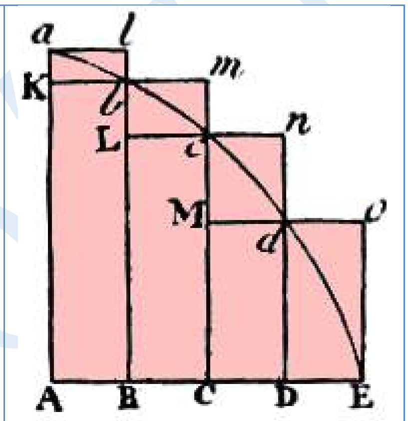
và hình bình hành $aKbl$; $bLcm$; $cMdn$; ... là hoàn chỉnh.



Nếu ta giảm độ rộng các hình bình hành xuống và tăng số lượng hình bình hành lên đến vô hạn: ta nói rằng tỉ lệ sau cùng giữa hình nội tiếp $AKbLcMdD$, hình bao xung quanh $AalbmcndoE$ hình cong $AabcdE$ bằng nhau và chúng trùng với nhau.



Hình chữ nhật dưới

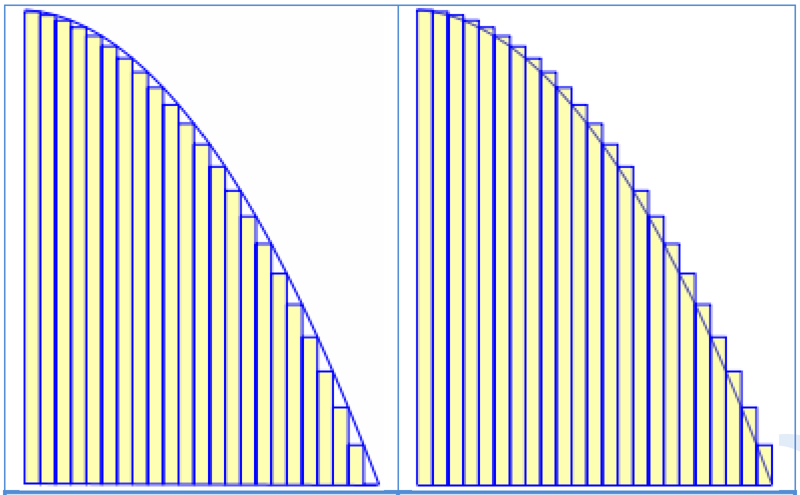


Hình chữ nhật trên

Nói cách khác, nếu chúng ta vẽ nhiều hình chữ nhật mỏng theo cách tương tự ở trên thì diện tích hình chữ nhật dưới và diện tích hình chữ nhật trên sẽ hội tụ về diện tích dưới đường cong, đó là diện tích chúng ta cần tìm.

Dưới đây là trường hợp chúng ta có 25 hình chữ nhật. Chúng ta có thể thấy tổng diện tích của các hình chữ nhật này gần với diện tích dưới đường cong. Chắc chắn tỷ lệ dưới đây sẽ gần bằng 1, đúng như Newton đã nói.

$$\text{Hình chữ nhật dưới} = \text{Hình chữ nhật trên} = \text{Diện tích dưới đường cong}$$



Hình chữ nhật dưới	Hình chữ nhật trên

Đây là ý tưởng cơ bản của giải tích, đó là ta sẽ tìm diện tích (hay độ dốc) cho một số ít trường hợp, sau đó ta tăng số lượng trường hợp lên vô hạn, và kết luận rằng chúng ta đang gần đến với câu trả lời cần tìm.

II. ĐÓNG GÓP CỦA ARCHIMEDES

Khái niệm tìm ra diện tích bề mặt cong sử dụng tổng vô hạn thì không hề mới vì Archimedes đã biết đến điều này cách đây 2000 năm.

III. HỌC TOÁN TỪ NHỮNG ĐIỀU CƠ BẢN

Dù ta đang xem Principia thông qua 1 bản dịch tiếng Anh nhưng lại rất thú vị khi ta quan sát các ký hiệu và biểu thức ban đầu của Newton. Trên đây, dĩ nhiên, là một phần rất nhỏ của cuốn sách Principia của Newton.

Ta nên nghiên cứu (và giảng dạy) toán với sự am hiểu sâu sắc lý do vì sao toán học phát triển, phát triển khi nào và ai đã góp phần phát triển toán. Ta không thể lúc nào cũng sử dụng nguồn tài liệu nguyên bản, nhưng ta cũng nên học toán với sự hiểu biết về lịch sử toán học hơn là không biết.

BÀI 4.4 TỔNG RIEMANN

Tích phân là một quy trình toán học giúp ta:

+ Tính diện tích miền phẳng dưới đường cong trong không gian 2 chiều (cạnh hình phẳng không thẳng và không có công thức đơn giản nào để tính diện tích hình phẳng đấy.).

+ Tính thể tích vật thể trong không gian 3 chiều (cạnh không thẳng.).

+ Vận tốc của vật thể nếu ta biết gia tốc vật thể đấy tại thời gian t (tức gia tốc luôn thay đổi theo thời gian cũng như vận tốc.).

+ Quãng đường của vật thể nếu ta biết vận tốc vật thể đấy tại thời gian t (vận tốc và quãng đường thay đổi theo thời gian nên chúng không có công thức đơn giản để tính.).

+ Áp suất của một vật thể chìm sâu dưới nước (áp suất thay đổi khi vật chìm xuống.).

Trong tích phân ta đã dành nhiều thời gian nói về diện tích dưới đường cong bởi vì miền phẳng tính diện tích đấy có thể dùng để đại diện cho bất kỳ đại lượng nào nói trong bài.

Trong các tiết toán ta dùng tích phân để tính diện tích dưới đường cong. Ta biết rằng diện tích hình phẳng dưới đường cong $f(x)$ được tính bằng cách tính tích phân xác định giữa cận dưới và cận trên a và b như sau:

$$\text{Diện tích} = \int_a^b f(x)\,dx$$

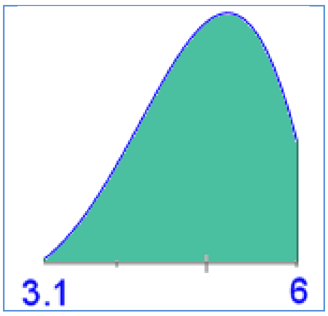
Tuy nhiên, không phải lúc nào ta cũng dễ dàng tính được tích phân trên.

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Tôi cần tính diện tích dưới đường cong sau, giữa $x = 3.1$ và $x = 6$.

$$y = |0.3x^3 \sin(x)|$$

Diện tích cần tính có hình sau:



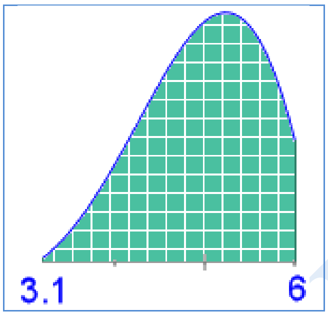
Khi đó ta có tích phân sau để tính diện tích yêu cầu:

$$\text{Diện tích} = \int_{3.1}^{6} |0.3x^3 \sin(x)|\, dx$$

Tuy nhiên, tích phân trên rất khó tính bằng cách “thủ công”.

Vậy ta phải làm gì? Ta cần hướng tính toán số để tính tích phân trên, giống như nhiều nhà toán học đã làm trước khi Isaac Newton và Gottfried Leibniz phát triển vi tích phân vào thế kỷ 17.

Một cách tính đó là vẽ mạng lưới trong miền phẳng và đến số hình vuông nhỏ.



Tuy nhiên, tôi đoán không lầm chắc bạn sẽ cảm thấy rất chán nản khi phải đếm số ô vuông, nhất là hình lớn thì số lượng ô vuông rất nhiều. Bạn hãy nhớ rằng muốn tính diện tích càng chính xác thì số lượng ô vuông trong miền phẳng phải càng nhiều, dẫn đến việc bạn phải bỏ công sức nhiều hơn để đếm số ô vuông đấy.

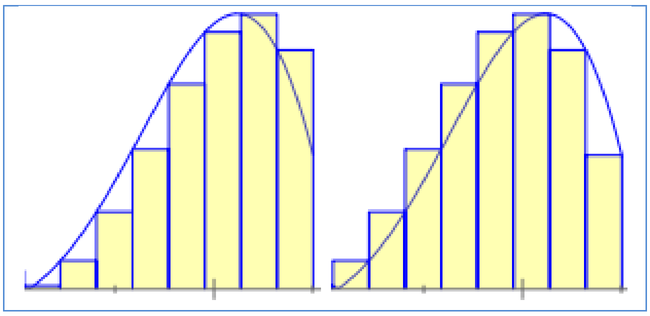
Có một cách khác hữu hiệu hơn. Lưu ý rằng cách ta làm giống như cách máy tính tính tích phân, đó là tính toán số.

II. TỔNG RIEMANN

Tổng Riemann cho ta một cách có hệ thống để tính diện tích dưới bề mặt cong khi ta biết hàm số toán học cho đường cong đấy. Cách làm này được đặt tên theo nhà toán học Bernhard Riemann (đọc là “ree – man” vì trong tiếng Đức “ie” đọc thành “ee”).

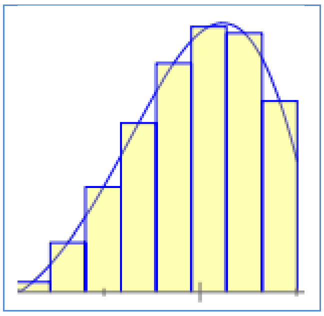
Ta sẽ xây dựng các hình chữ nhật có độ rộng bằng nhau ở giữa điểm đầu và điểm cuối của miền phẳng ta cần tính diện tích. Nếu ta cộng các diện tích này lại, ta sẽ được giá tri xấp xỉ tốt cho diện tích.

Ta có thể đặt các hình chữ nhật sao cho đường cong nằm bên trái hoặc bên phải như hình dưới. Tùy thuộc vào đường cong, hình chữ nhật mà ta sẽ có các kết quả xấp xỉ khác nhau.

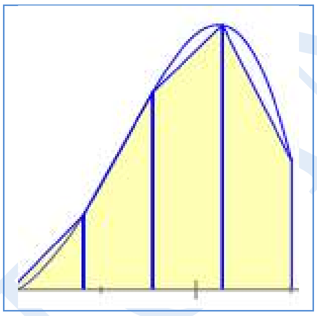


Bạn có thể thấy ở ví dụ trên, kết quả xấp xỉ "trái" sẽ rất nhỏ (tổng diện tích các hình chữ nhật nhỏ hơn diện tích dưới đường cong), trong khi kết quả xấp xỉ "phải" sẽ rất lớn.

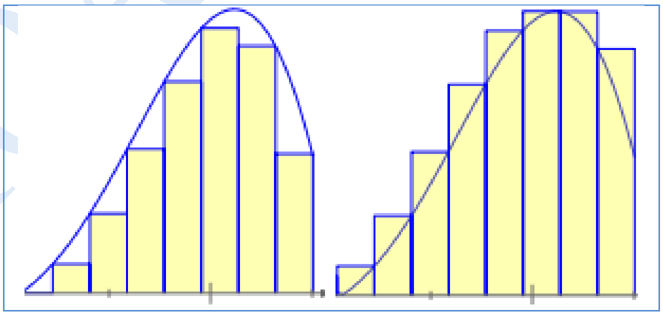
Một cách đặt hình chữ nhật đó là ta đặt sao cho đường cong đi qua điểm giữa của mỗi hình chữ nhật như sau:



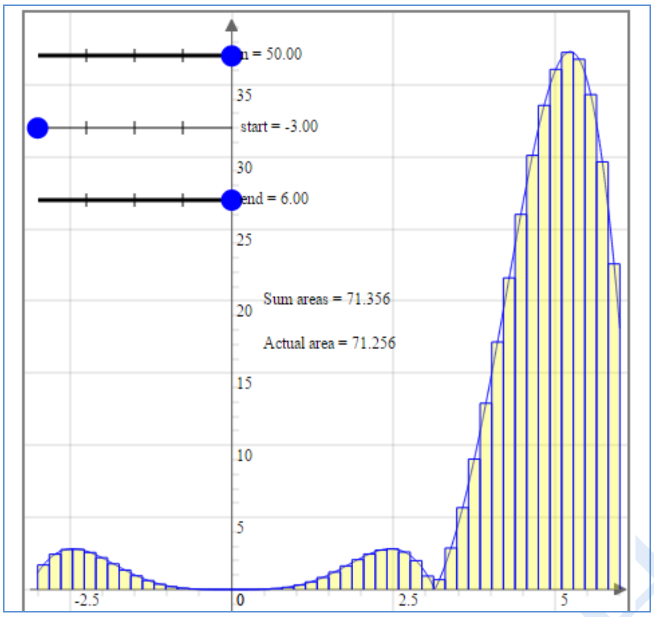
Một cách khác nữa đó là ta xây dựng hình thang. Khi số lượng hình thang ngày càng lớn, chúng sẽ bao gần hết đường cong.



Hai cách cuối cùng đó là ta dùng hình chữ nhật dưới (tức hình chữ nhật nằm hoàn toàn dưới đường cong) và hình chữ nhật trên (tức hình chữ nhật nằm hoàn toàn trên đường cong.)



Quay trở lại vấn đề, áp dụng cách làm điểm giữa, ta sẽ vẽ 50 hình chữ nhật sao cho đường cong đi qua điểm giữa của mỗi hình chữ nhật, cộng diện tích các hình chữ nhật này lại, bạn sẽ thấy đáp án không đúng dù chỉ với 1 chữ số thập phân so với kết quả bằng tích phân.



Bạn có thể thực hiện cách chia các hình chữ nhật cũng như các cách giải tại http://www.intmath.com/blog/mathematics/riemann-sums-4715.

Nhớ rằng 300 năm trước, người ta phải tính diện tích từng hình một bằng tay và tính rất nhiều hình chữ nhật. Vì vậy rất dễ hiểu khi họ buộc phải phát triển thêm nhiều công thức để tiện việc tính toán, như logarithm chẳng hạn.

Trong danh sách các công thức tính toán số thiếu đi công thức tính chuẩn xác nhất. Thay vì dùng các đoạn thẳng nối 2 điểm trên đồ thị (hướng tiếp cận hình thang), ta có thể xấp xỉ diện tích đường cong bằng chuỗi các parabola, đó là quy tắc Simpson.

Tính phân cho ra giá trị diện tích hợp lý nếu đường cong nằm hoàn toàn trên trục x (như đồ thị ví dụ trên). Nên với phần đồ thị dưới trục x, bạn cần đặt kết quả tích phân vào dấu trị tuyệt đối.

III. TỔNG KẾT

Bài viết này cho bạn thấy khái niệm quan trọng trong tích phân. Diện tích dưới đường cong có thể đại diện cho nhiều vấn đề trong đời sống, từ cách tìm vận tốc đến tìm thể tích.

Trước khi vi tích phân phát triển, cách để người ta làm những điều trên đó là sử dụng hướng tính toán số, tức tính tổng diện tích các hình chữ nhật (hay hình thang) rất mỏng để cho ra kết quả xấp xỉ diện tích. Càng nhiều hình chữ nhật, kết quả xấp xỉ càng tốt.

BÀI 4.5 ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA VI TÍCH PHÂN

Bạn có thể theo dõi sơ lược khái niệm về "*Định lý cơ bản của vi tích phân*" trong bài "*Diện tích dưới đường cong*" và "*Tích phân xác định*".

Trong bài này, ta giả sử rằng hàm f liên tục trên khoảng đóng $[a;\ b]$. Điều này có nghĩa đường cong không đứt đoạn trong đoạn $x = a$ đến $x = b$ và điểm đầu, cuối thuộc đoạn đó.

I. ĐỊNH LÝ CƠ BẢN THỨ NHẤT

Cho các điều kiện ở trên, ta xác định một hàm F (chữ "F" viết hoa) như sau:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

(Lưu ý rằng trong tích phân trên ta có cận trên là x và ta tính tích phân theo biến t).

Định lý cơ bản thứ 1 nói rằng:

Hàm F liên tục trên đoạn đóng $[a; b]$.
Hàm F khả vi (tức có thể tính vi phân) trên đoạn mở (a, b).
$F'(x) = f(x)$, tức đạo hàm của $F(x)$ là $f(x)$.

Chứng minh định lý cơ bản thứ nhất

Giả sử x và $x + h$ là các giá trị trên đoạn mở $(a;\ b)$.

Vì ta định nghĩa $F(x)$ là $\int_a^x f(t)\,dt$, ta có thể viết:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

Ta viết lại tích phân đầu tiên ở vế phải thành tổng của hai tích phân (chú ý cận trên và cận dưới) và đơn giản mọi thứ như sau:

$$\begin{aligned} &F(x+h) - F(x) \\ &= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt \end{aligned}$$

Bây giờ ta chia hai vế cho $h > 0$:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt$$

Với bất kỳ đường cong trong đoạn $(x; x+h)$ sẽ có một giá trị c nào đó sao cho $f(c)$ là giá trị cực tiểu tuyệt đối của hàm số trong đoạn đó, và có một giá trị d nào đó sao cho $f(d)$ là giá trị cực đại tuyệt đối của hàm số trong đoạn đó (đây là hệ quả của Định lý giá trị cực).

Nên ta có thể viết:

$$f(c) \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(d)$$

Nếu h ngày càng nhỏ, cả c và d đều tiến tới x nên ta có giới hạn sau:

$$\lim_{h\to 0} f(c) = \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$$

Và:

$$\lim_{h\to 0} f(d) = \lim_{d\to x} f(d) = f(x)$$

Vì biểu thức của chúng ta ngày càng tiến sát đến $f(x)$ từ hai phía nên ta có thể kết luận:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

Ta nhận thấy rằng giới hạn ở vế trái chính là định nghĩa đạo hàm $F(x)$ nên ta cần chứng minh hàm $F(x)$ khả vi, khi đó $F'(x) = f(x)$. Đồng thời, vì $F(x)$ khả vi tại mọi điểm trên $(a;\ b)$ nên hàm này liên tục trên đoạn đấy.

Lưu ý: Khi tính tích phân, việc bạn sử dụng biến nào không có khác biệt lắm nên hoàn toàn ổn khi ta sử dụng biến t hay x, miễn là chúng không có mâu thuẫn nào.

II. ĐỊNH LÝ CƠ BẢN THỨ THỨ HAI

Ta tiếp tục giả sử hàm f là hàm liên tục trên $[a;\ b]$ và F là một nguyên hàm của f, tức $F'(x) = f(x)$.

Định lý cơ bản thứ 2 nói rằng:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Định lý này có liên hệ đến kết quả đại số ta thu được khi tính tính phân với hàm số trong đồ thị ta cần tính diện tích dưới đường cong.

Để tìm diện tích giữa cận dưới $x = a$ và cận trên $x = b$, ta tìm tổng diện tích dưới đường cong từ $x = 0$ đến $x = b$ và trừ đi những phần diện tích không cần thiết từ $x = 0$ đến $x = a$.

Chứng minh định lý cơ bản thứ hai

Từ định lý cơ bản thứ nhất, ta có:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Và,

$$F'(x) = f(x)$$

Giả sử $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. (Nhớ rằng một hàm số bất kỳ có vô số kết quả nguyên hàm, sai khác nhau bởi một hằng số nào đó, nên ta có thể viết $G(x) = F(x) + K$).

Vậy ta được:

$$G'(x) = F'(x)$$

Bây giờ, vì $G(x) = F(x) + K$, ta có thể viết:

$$\begin{aligned}
&G(b) - G(a) \\
&= (F(b) + K) - (F(a) + K) \\
&= F(b) - F(a) \\
&= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt \\
&= \int_a^b f(t)\,dt - 0 \\
&= \int_a^b f(t)\,dt
\end{aligned}$$

Vậy ta đã chứng minh rằng:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Lưu ý: Một lần nữa, khi tính tích phân, việc bạn sử dụng biến nào không có khác biệt lắm nên hoàn toàn ổn khi ta sử dụng biến t hay x, miễn là chúng không có mâu thuẫn nào.

III. BÀI TẬP

(1) Tính đạo hàm:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_5^x t^2 + 3t - 4\,dt\right)$$

Trả lời bài tập (1)

Theo định lý cơ bản thứ 1, nếu $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, thì $F'(t) = f(t)$.

Trong ví dụ này, $f(t) = t^2 + 3t - 4$.

Vậy:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_5^x t^2 + 3t - 4\,dt\right) = x^2 + 3x - 4$$

Ta không cần "đi vòng", tức tính tích phân trước rồi đạo hàm sau mà ta có thể tính trực tiếp đạo hàm. Tuy nhiên, ta hãy làm cách "đi vòng" để hiểu rõ nguyên lý hơn.

$$\begin{aligned}&\int_5^x t^2 + 3t - 4\,dt\\ &= \left(\frac{t^3}{3} + \frac{3t^4}{4} - 4t\right)\Bigg|_5^x\\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x - 59.167\end{aligned}$$

Tiếp theo, ta đạo hàm kết quả trên theo x:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x - 59.167\right) = x^2 + 3x - 4$$

Đáp án này giống với đáp án ta thu được từ trước. Lưu ý rằng ta không quan tâm đến cận dưới của tích phân là bao nhiêu (trong bài này là 5) vì giá trị hằng số tạo ra (trong bài này là 59.167) sẽ biến mất khi tính đạo hàm.

(2) Tính đạo hàm:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_m^x t\sin(t^t)\,dt\right)$$

Trả lời bài tập (2)

Trong câu hỏi này, $f(t) = t\sin(t^t)$.

Vậy kết quả đạo hàm là:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_m^x t\sin(t^t)\,dt\right) = x\sin(x^x)$$

Ta chưa nghiên cứu cách tính tích phân trong trường hợp như $\int_m^x t\sin(t^t)\ dt$, nhưng ta không cần quan tâm cách làm điều này (thật ra ta không thể tính tích phân này thông qua những hàm cơ bản, nhưng ta lại dễ dàng tính được đạo hàm).

Lưu ý rằng hằng số m không tạo ra sự khác biệt cho đạo hàm cuối cùng.

(3) Tính đạo hàm:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x t\sqrt{1+t^3}\,dt\right)$$

Trả lời bài tập (3)

Lần này, $f(t) = t\sqrt{1+t^3}$.

Vậy:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x t\sqrt{1+t^3}\,dt\right) = x\sqrt{1+x^3}$$

IV. TƯƠNG TÁC

Bạn có thể dùng chương trình ứng dụng nhỏ sau để khám phá thêm về định lý cơ bản thứ 2 tại http://www.intmath.com/integration/6b-fundamental-theorem-calculus-interactive.php#applet.

BÀI 4.6 CÔNG THỨC TANZALIN TÍNH TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Bài viết này sẽ trình bày một cách đơn giản hơn để tính những tích phân mà ta thường phải sử dụng công thức tính tích phân từng phần.

Công thức Tanzalin rất dễ để thực hiện. Nếu lúc bạn làm kiểm tra phải làm theo công thức tích phân từng phần theo lý thuyết, bạn có thể dùng công thức này để kiểm tra kết quả.

Công thức Tanzalin được sử dụng nhiều ở Indonesia, ngoài ra tôi không thể tìm thêm nơi nào dùng công thức này (trong văn học Anh) và tôi không có thông tin về Tanzalin, có thể đây là một nhà toán học.

I. VÍ DỤ 1

$$\int 2x(3x-2)^6\,dx$$

1) Sử dụng công thức tích phân từng phần

Đầu tiên, ta sẽ dùng công thức tính tích phân từng phần, từ đó ta có dữ liệu để so sánh.

Ta xác định u, v, du và dv như trong bảng sau:

$u = 2x$	$dv = (3x-2)^6\,dx$
$du = 2\,dx$	$v = \frac{1}{21}(3x-2)^7$

Công thức tích phân từng phần cho ta:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int 2x(3x-2)^6\,dx = \frac{2x}{21}(3x-2)^7 - \frac{2}{21}\int (3x-2)^7\,dx$$

Bây giờ, ta tính tích phân chưa biết:

$$\int (3x-2)^7\,dx = \frac{1}{24}(3x-2)^8 + C$$

Thay kết quả, ta được:

$$\int 2x(3x-2)^6\,dx = \frac{2x}{21}(3x-2)^7 - \frac{1}{252}(3x-2)^8 + C$$

Ta có thể đặt nhân tử chung để đơn giản hóa kết quả:

$$\int 2x(3x-2)^6\,dx = \frac{21x+2}{252}(3x-2)^7 + C$$

Công thức Tanzalin ít phức tạp hơn.

2) Sử dụng công thức Tanzalin

Trong công thức Tanzalin, ta thiết lập bảng như bên dưới đây. Ở cột đầu tiên là thứ tự cấp đạo hàm của biểu thức đơn giản nhất trong tích phân cần tính (ta cần chọn như vậy bởi chúng sẽ biến mất sau một vài bước.).

Ở cột thứ hai là tích phân phần biểu thức còn lại trong hàm tính tích phân.

Ta chỉ việc nhân 2 biểu thức ở ô nền xanh với nhau trong bảng (biểu thức $2x$ nguyên thủy và biểu thức kết quả tính tích phân đầu tiên). Ta không đổi dấu của những biểu thức này.

Sau đó ta nhân 2 biểu thức ở ô nền vàng (đạo hàm bậc 1 và biểu thức tích phân lần hai). Ta đặt dấu trừ cho tích này.

Đáp án tích phân là tổng của 2 biểu thức trong cột cuối cùng.

$$\int 2x(3x-2)^6\,dx$$

Đạo hàm	Tích phân	Dấu	Tích các ô cùng màu
$2x$	$(3x-2)^6$		
2	$\frac{1}{21}(3x-2)^7$	$+$	$\frac{2x}{21}(3x-2)^7$
0	$\frac{1}{504}(3x-2)^8$	$-$	$-\frac{1}{252}(3x-2)^8$

Cộng các kết quả trong cột thứ 4:

$$\int 2x(3x-2)^6\,dx = \frac{2x}{21}(3x-2)^7 - \frac{1}{252}(3x-2)^8 + C$$

Ta thêm hằng số tích phân C trong kết quả cuối cùng chứ không phải trong bảng.

$$\int 2x(3x-2)^6\,dx = \frac{21x+2}{252}(3x-2)^7 + C$$

II. VÍ DỤ 2

$$\int x\sin(x)\,dx$$

Ta sẽ sử dụng công thức Tanzalin.

Đạo hàm	Tích phân	Dấu	Tích các ô cùng màu
x	$\sin(x)$		
1	$-\cos(x)$	$+$	$-x\cos(x)$
0	$-\sin(x)$	$-$	$\sin(x)$

Ta nhân (x) với $(-\cos(x))$ và ta không đổi dấu. Sau đó ta nhân (1) với $(-\sin(x))$ và ta đổi dấu.

Cộng kết quả cột cuối cùng, ta được kết quả:

$$\int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

III. VÍ DỤ 3

$$\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$$

Trong bài này, công thức Tanzalin yêu cầu 4 dòng vì ta còn một đạo hàm để xác định.

Ta cần đặt dấu xen kẽ (cột thứ 3), vậy dòng thứ 4 sẽ có dấu dương.

Đạo hàm	Tích phân	Dấu	Tích các ô cùng màu
x^2	$(x-1)^{1/2}$		
$2x$	$\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$	$+$	$\frac{2x^2}{3}(x-1)^{3/2}$
2	$\frac{4}{15}(x-1)^{5/2}$	$-$	$-\frac{8x}{15}(x-1)^{5/2}$
0	$\frac{8}{105}(x-1)^{7/2}$	$+$	$\frac{16}{105}(x-1)^{7/2}$

Vậy đáp án cuối cùng là:

$$\int x^2\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2x^2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{8x}{15}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{16}{105}(x-1)^{\frac{7}{2}} + C.$$

IV. VÍ DỤ 4

$$\int x^2\ln(4x)\,dx$$

Ta cần chọn $\ln(4x)$ cho cột đầu tiên, dựa theo danh sách thứ tự ưu tiên khi tính tích phân từng phần:

+ log của x.

+ x lũy thừa.

+ e lũy thừa x.

Lưu ý: Nếu ta chọn cách khác, khi đó ta phải tính tích phân $\ln 4x$, rất phức tạp.

Đạo hàm	Tích phân	Dấu	Tích các ô cùng màu
$\ln(4x)$	x^2		
$\frac{1}{x}$	$\frac{x^3}{3}$	$+$	$\frac{x^3 \ln 4x}{3}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{x^4}{12}$	$-$	$-\frac{x^3}{12}$
$\frac{2}{x^3}$	$\frac{x^5}{60}$	$+$	$-\frac{x^3}{60}$

Khi nào ta dừng? Cột đạo hàm cũng như cột tích phân sẽ ngày càng dài thêm. Công thức Tanzalin yêu cầu một trong các cột này phải "biến mất" (tức bằng 0) nên ta phải có cách nao đó để dừng lại.

Vậy đáp án cuối cùng của ta là:

$$\int x^2 \ln 4x \ dx = \frac{x^3 \ln 4x}{3} - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{60} + \frac{1}{80} + \frac{1}{420} + \cdots\right) x^3 + C$$

Biểu thức trong ngoặc phải bằng $\frac{1}{9}$ (vì đây chính là đáp án nếu ta dùng cách tính tích phân từng phần), nhưng như bạn thấy, đây không phải cấp số nhân nên cần ta phải có kỹ thuật tính toán.

V. TỔNG KẾT

Trong khi công thức Tanzalin chỉ nắm giữ những tích phân bao gồm (ít nhất một) biểu thức đi kèm, công thức này cho ta cách tính tích phân đơn giản hơn trình bày theo công thức tính tích phân từng phần.

BÀI 4.7 TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN 2 LẦN

Khi lần đầu ta học tích phân, thông thường các ví dụ là những đa thức đơn giản hay một hàm số như sau:

$$\int (x^2 + 4)\, dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

I. TÍCH PHÂN TÍCH

Liệu có cách nào để tính tích phân là tích của 2 hàm số như ví dụ sau không?

Ví dụ 1:

$$\int x \sin x\, dx$$

Lúc này ta cần một kỹ thuật quan trọng và hữu ích trong vi tích phân là tích phân từng phần (bạn có thể xem lại toàn bộ lý thuyết cơ bản cũng như ví dụ trong bài 3.3.8).

Để tìm tích phân này, ta chọn u sao cho đạo hàm của u phải đơn giản hơn u. Trong ví dụ này, ta sẽ chọn $u = x$ và quy trình giải như sau:

$$u = x \qquad dv = \sin x\, dx$$

$$du = dx \qquad v = \cos x$$

Ta áp dụng công thức tích phân từng phần và tính tích phân

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int x \sin x\, dx = (x)(-\cos x) - \int -\cos x\, dx$$

Rút gọn, ta được:

$$\int x \sin x\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx$$

Bây giờ, tích phân cuối cùng rất dễ để tính, do đó ta có thể viết ra đáp án:

$$\int x \sin x\, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Lưu ý 1: Hằng số tích phân (C) xuất hiện sau khi ta làm tích phân cuối cùng.

Lưu ý 2: Chọn u và dv có thể khiến bạn căng thẳng, nhưng nếu bạn tuân thủ theo quy tắc LoNguDaLuMu (có thể đọc vui thành "Lợn Ngựa Đạp Lủng Mũ"), quy tắc này rất dễ làm. Với

u, bạn chọn thứ tự ưu tiên từ cao nhất xuống thấp trong danh sách và chọn dv theo thứ tự ưu tiên từ thấp nhất lên cao:

Lo: Hàm Logarithm

Ngu: Hàm lượng giác Ngược

Da: Hàm Đại số (đa thức đơn giản)

Lu: Hàm Lượng giác

Mu: Hàm Mũ

II. TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN – 2 LẦN

Bây giờ, ta xem trường hợp kép, tức ta sẽ không có đáp án ngay từ lần đầu thực hiện tích phân từng phần mà ta phải thực hiện phép tích phân từng phần 2 lần.

Ví dụ 2:

$$\int x^2 e^x \, dx$$

Trong ví dụ này ta chọn $u = x^2$ vì khi lấy vi phân, ta sẽ được biểu thức đơn giản hơn e^x, với xét theo quy tắc "Lợn Ngựa Đạp Lủng Mũ" thì hàm đại số (x^2) đứng vị trí ưu tiên cao hơn hàm mũ (e^x)

$$u = x^2 \qquad dv = e^x \, dx$$

$$du = 2x \, dx \qquad v = e^x$$

Bây giờ ta tính tích phân từng phần:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int e^x (2x) \, dx$$

Ta sắp xếp lại sẽ được tích phân dưới đây, tôi sẽ gọi là phương trình (1):

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx \quad (1)$$

Lần này ta không thể ngay lập tức giải được tích phân cuối cùng, vì vậy ta cần thực hiện tích phân từng phân thêm một lần nữa. Chọn u sao cho đạo hàm của u đơn giản hơn u, ta được:

$$u = x \qquad dv = e^x \, dx$$

$$du = dx \qquad v = e^x$$

Lưu ý rằng u và v này có giá trị khác với u và v ở ban đầu ví dụ 2, đây có thể là cái bẫy nếu bạn không để ý.

Bây giờ ta thực hiện tính tích phân từng phần của $\int xe^x\,dx$:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$$

Tích phân cuối cùng rất đơn giản, từ đó tôi có phương trình (2) sau:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C_1 \quad (2)$$

Nhưng ta chưa hoàn tất bài này, ta nên nhớ rằng cái ta cần tính là tích phân này:

$$\int x^2e^x\,dx$$

Đây là đáp án khi thực hiện tích phân từng phần lần 1:

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx \quad (1)$$

Thay đáp án (2) vào phương trình (1) và ta có:

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C$$

Rút gọn lại, ta được đáp án cuối cùng:

$$\int x^2e^x\,dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

Lưu ý vị trí hằng số "$+C$" xuất hiện trong đáp án, hằng số này xuất hiện khi ta đã tính hết tất cả các tích phân (nhiều học sinh hay lưỡng lự ở bước này, có bạn thêm "$+C$" trước khi tính xong tích phân, hay có bạn quên thêm vào). Tôi sử dụng chỉ số dưới chân 1 ở hằng số đầu tiên ví hằng số này không cùng giá trị với giá trị C cuối cùng.

III. TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN 2 LẦN – BÀI GIẢI

Ta cũng tìm hiểu cách sử dụng tích phân từng phần để giải ra tích phân ta đang tìm. Sau đây là ví dụ.

Ví dụ 3:

$$\int e^x \sin x\,dx$$

Trong ví dụ này, ta không có cách rõ ràng nên chọn u như thế nào vì vi phân e^x hay $\sin x$ đều không cho ta biểu thức đơn giản hơn. Ta chọn khả năng "đơn giản nhất" có thể như sau (bất chấp e^x có mức ưu tiên dưới hàm lượng giác trong bảng "Lợn Ngựa Đạp Lủng Mũ":

$$u = e^x \qquad\qquad dv = \sin x\,dx$$

$$du = e^x\,dx \qquad v = -\cos x$$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Ta được phương trình (3) sau:

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx \quad (3)$$

Bây giờ, để tính tích phân cuối cùng:

$$\int e^x \cos x\,dx$$

Một lần nữa, ta cần quyết định chọn u là hàm số nào, và ta quyết định chọn hàm số cho ra đạo hàm đơn giản nhất:

$$u = e^x \qquad dv = \cos x\,dx$$

$$du = e^x\,dx \qquad v = \sin x$$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần lần thứ 2:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Ta thu được phương trình (4):

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx \quad (4)$$

Đợi đã, tích phân cuối cùng lại giống tích phân đề bài. Nếu ta tiếp tục thực hiện tích phân từng phần, quy trình này sẽ không bao giờ kết thúc.

Vậy ta cần sử dụng mẹo sau. Ta thay thế đáp án tích phân từng phần lần 2 (phương trình (4)) vào đáp án tích phân từng phần ban đầu (phương trình (3)).

$$\int e^x \sin x\,dx$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

$$= -e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx\right)$$

Bỏ ngoặc:

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx \quad (5)$$

Bây giờ, phương trình trên có dạng như sau:

$$p = -q + r - p$$

Để giải phương trình theo p, ta chỉ cần thêm p vào hai vế:

$$2p = -q + r$$

Sau đó chia hai vế cho 2:

$$p = \frac{-q + r}{2}$$

Vì vậy ta sẽ làm quy trình tương tự cho phương trình tích phân (5). Tôi thêm $\int e^x \sin x \, dx$ vào hai vế:

$$2 \int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + K$$

Chia hai vế cho 2, thu được:

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$$

Vậy tôi đã giải phương trình (5) theo $\int e^x \sin x \, dx$, cho ta đáp án mong muốn.

Lưu ý rằng tôi dùng "$+K$" cho hằng số đầu tiên, hằng số cuối cùng "C" có giá trị bằng $K/2$, nhưng thông thường ta chỉ lưu tâm đến hằng số cuối cùng.

GIỚI THIỆU TRANG WWW.INTMATH.COM

I. VỀ INTMATH

IntMath ra đời nhằm khơi gợi sự hứng thú toán học cho mọi người. Để thực hiện điều này, trang web cung cấp những ví dụ rõ ràng, có liên quan đến cuộc sống hàng ngày và những ứng dụng tương tác, giúp người đọc trải nghiệm các khái niệm một cách trực quan.

IntMath ra đời vào năm 1997 và cho đến nay đã có hơn 10 000 khách ghé thăm mỗi ngày với hơn nửa triệu trang được xem mỗi tháng.

Chân thành cám ơn những phản hồi tích cực từ phía độc giả. Tôi rất cảm kích vì IntMath rất hữu dụng với bạn.

II. TÁC GIẢ

Tôi là Murray Bourne, giảng dạy toán tại trường trung học Úc (khối 7 đến khối 12), Giáo dục Kỹ thuật và Nâng cao (TAFE) và giảng dạy Đại học (tại trường Đại học Griffith và tại Nhật Bản). Ngoài ra, tôi còn dạy thêm nhiều môn khác, bao gồm âm nhạc, tiếng Anh, máy tính.

Hiện tại tôi đang điều hành trang tư vấn về luyện toán và học tập điện tử, Bourne2Learn.

Murray Bourne, Singapore, 2016.

III. LIÊN HỆ

Tôi rất do dự khi để thư điện tử ở đây vì tôi lo ngại một số người lợi dụng để gửi những tin nhắn rác. Vì vậy, nếu độc giả muốn liên hệ với tôi, hãy sử dụng biểu mẫu trong phần *"Comment, Question?"* để liên hệ với tôi. Tôi sẽ liên lạc lại với bạn bằng thư điện tử khi tôi chắc chắn bạn là người.

IV. ĐIỀU KHOẢN SỬ DỤNG

Bạn có thể xem và in một bản sao các bài viết trong IntMath sử dụng cho các công việc cá nhân của bạn, không được sử dụng với mục đích thương mại.

Bạn không được sao chép, lưu trữ kể cả với hình thức in ra giấy hay trong các hệ thống tìm kiếm điện tử, gửi, chuyển, trình bày, phát sóng, xuất bản, tái bản, tác phẩm phái sinh, trưng bày, phân phát, bán, đăng ký, cho thuê hay bất cứ phương thức chuyển tải bất kỳ phần nào cho người thứ ba với mục đích thương mại hay gia tăng lợi nhuận, ngoại trừ việc trao đổi học thuật một cách thẳng thắn trong các học viện học thuật.

Điều khoản này bao gồm (nhưng không giới hạn) trưng bày các mục của IntMath trong công việc của bạn (nhằm tạo ấn tượng rằng đây là công sức bạn tạo nên).

Khuyến khích bạn dẫn nguồn từ bất kỳ bài viết nào trong trang này, nhưng bạn không được sao chép và dán các nội dung đến trang web của bạn. Bạn không được tạo "siêu liên kết" đến hình ảnh của tôi (tức thiết lập <img src="http://www.intmath.com/images/..">) vì điều này sẽ làm hao phí băng thông và khiến tôi phải tốn tiền.

Bạn được phép hiển thị trang web này trong lớp học của bạn với mục đích giảng dạy.

Liên hệ với tôi (thông qua biểu mẫu trong *"Comment, Question?"*) nếu bạn muốn xin phép tôi sử dụng các nội dung theo cách thức khác mà tôi chưa đề cập ở những việc tôi đồng ý ở trên.

IV. GIẤY PHÉP BẢN QUYỀN

Những hình ảnh có trong trang web này được:

+ Tôi tạo nên (đại đa số các công thức và đồ thị.).

+ Hợp nhất vào trang web của tôi nhằm tạo tin tưởng rằng chúng thuộc khoản phạm vi công cộng (những ảnh chụp nhất định và clip nghệ thuật.).

Nếu tôi vô tình xâm phạm bản quyền hay sử dụng hình ảnh có bản quyền mà chưa xin phép, hãy thông báo với tôi để tôi kịp thời khắc phục.

Tất cả những vấn đề khác (bao gồm những bài viết về mánh khóe toán học) ngoại trừ bản ghi khác, đều có bản quyền © Murray Bourne, 1997 – 2016.

V. QUYÊN GÓP ỦNG HỘ

Hãy giúp đỡ để IntMath tiếp tục phát triển. Tôi rất hoan nghênh sự ủng hộ của bạn.

http://www.intmath.com/help/site-info.php#donate

VI. PHẢN HỒI: (10 phản hồi mới nhất tính đến thời điểm 0 giờ 00 phút, Chủ Nhật ngày 07 tháng 02 năm 2016).

Dynamic Daman, Ludhiana, Ấn Độ (26/01/2016): Trang này giúp tôi rất nhiều. Tôi có nhiều câu hỏi không biết tìm câu trả lời ở đâu cho đến khi tôi tìm thấy trang này, mọi thứ đều được giải thích kèm đồ thị rõ ràng. Cảm ơn rất nhiều.

Yue Chi Kwan, London, Anh (17/01/2016): Ba tôi giới thiệu trang IntMath cho tôi và tôi rất mừng vì điều này do nguồn bài học toán học đều có sự liên kết với nhau, có thể hiểu được những kiến thức toán trong trang này, rất rõ ràng và khiến tôi rất hứng thú (hơn bình thường) về toán học bởi vì ngoài việc học, trang này khiến tôi cảm thấy thích thú khi xem thư điện tử và đọc những bài viết tôi quan tâm. Tôi chỉ muốn nói lời cảm ơn đến trang IntMath, hãy tiếp tục phát huy.

Mohammad Abdul Rehman, Ấn Độ (05/01/2016): Cảm ơn tác giả rất nhiều. Những bài viết giúp tôi và các bạn tôi rất nhiều. Tôi học ở một trường cao đẳng đặc biệt nên giảng viên thường không đủ giỏi để giải đáp rõ ràng những thắc mắc của tôi. Những bài viết này rất rõ ràng và dễ hiểu. Một lần nữa, cảm ơn ông đã thực hiện những bài viết này.

Kasim Sache, Mỹ (22/12/2015): Tôi rất thích trang IntMath, đây là một trang tuyệt diệu và là một trong những sáng tạo tốt nhất mà tôi từng thấy. Hãy tiếp tục nỗ lực, ông và mỗi nhân viên giúp đỡ đều rất tuyệt.

Faisal Iqbal, Karachi, Pakistan (20/12/2015): Cảm ơn thư tin tức IntMath, những lá thư này hỗ trợ tôi trong giảng dạy rất nhiều.

Tamo, Nam Phi (18/11/2015): IntMath có ích và tốt cho học sinh.

Manju Chodhury, Jaipur, Ấn Độ (16/11/2015): Không thể nói đủ lời cảm ơn cho những nỗ lực tuyệt vời này. Ông hết sức có ích.

Kaustubh, Mumbai, Ấn Độ (14/11/2015): Trang IntMath là một trang tuyệt vời, nhiều kỹ thuật rất hay.

Naveen Kumar, Bangalore, Ấn Độ (06/11/2015): Ban đầu tôi rất dở toán, nhưng nhờ trang của ông, tôi đã học được nhiều điều về toán và bây giờ tôi có thể giải bất kỳ bài toán nào. Tôi xin gửi lời cảm ơn ông rất nhiều vì ông đã tạo nên trang này và giúp đỡ tôi rất nhiều, tôi sẽ không bao giờ quên ơn ông.

Mahi, Ấn Độ (17/10/2015): Đây là một trang nổi bật cho học sinh, cảm ơn ông đã tạo ra trang này, Chúa trời sẽ luôn bên ông, cảm ơn ông rất nhiều.